

2017年5月16-23日 ES025 10:30~

エネルギー工学基礎特論 核融合発電炉開発における 流体力学の役割

エネルギー工学専攻・
エネルギー電磁流体工学グループ

渡邊 清政
(核融合科学研究所)

2017/5/23

講義内容一覧

核融合発電炉の原理・利点

核融合発電炉とプラズマ、温度、流体力学

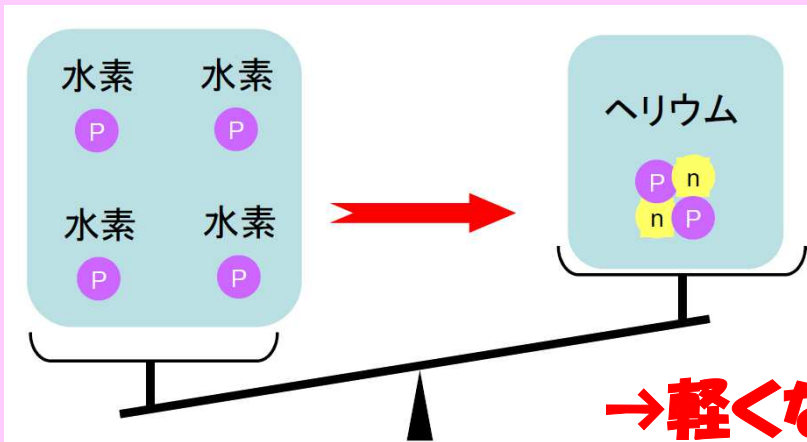
流体方程式と電磁流体方程式

電磁流体方程式に基づく電磁流体力学的平衡(釣合)

核融合発電炉と電磁流体力学・輸送

流体方程式に基づく粒子輸送

核融合発電炉とは？



軽い原子核が衝突して合体(融合)し、より重い原子核になる時に、発生するエネルギーを利用した発電炉。

→軽くなって
エネルギーが出る



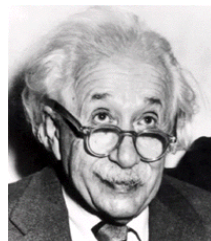
エネルギーと質量

$$\text{エネルギー} = \text{質量} \times \text{光速}^2$$
$$(E = mc^2)$$

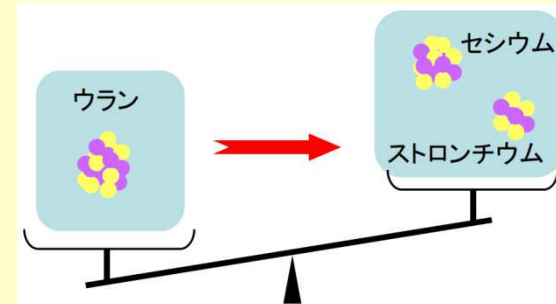
原子核反応(核融合、核分裂)

↓
質量が減少

↓
2017/5/23
エネルギー



アインシュタイン

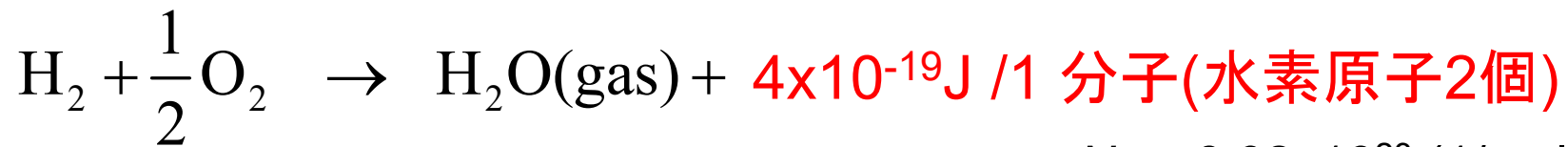
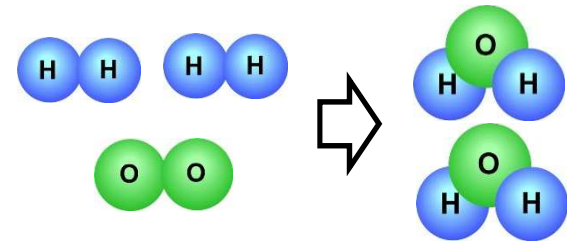
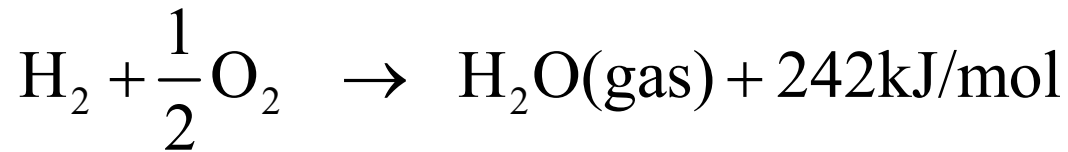


重い原子核が分裂し、より軽い原子核になっても、エネルギーが出る

核分裂反応(原子炉で実現)

核融合反応とは？：化学反応との比較

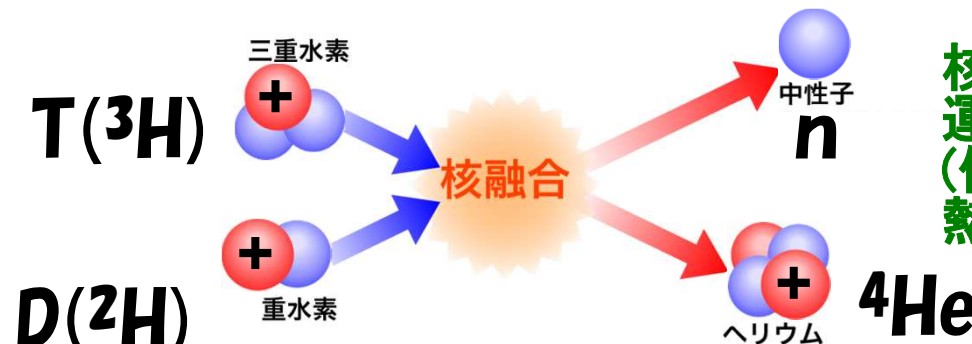
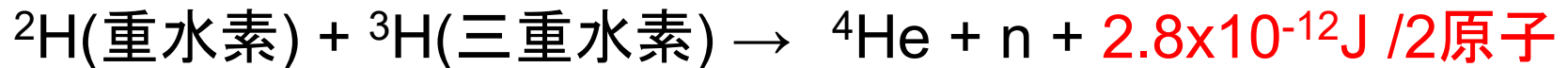
- 化学反応の場合(水素の燃焼)



$$N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ (1/mol)}$$

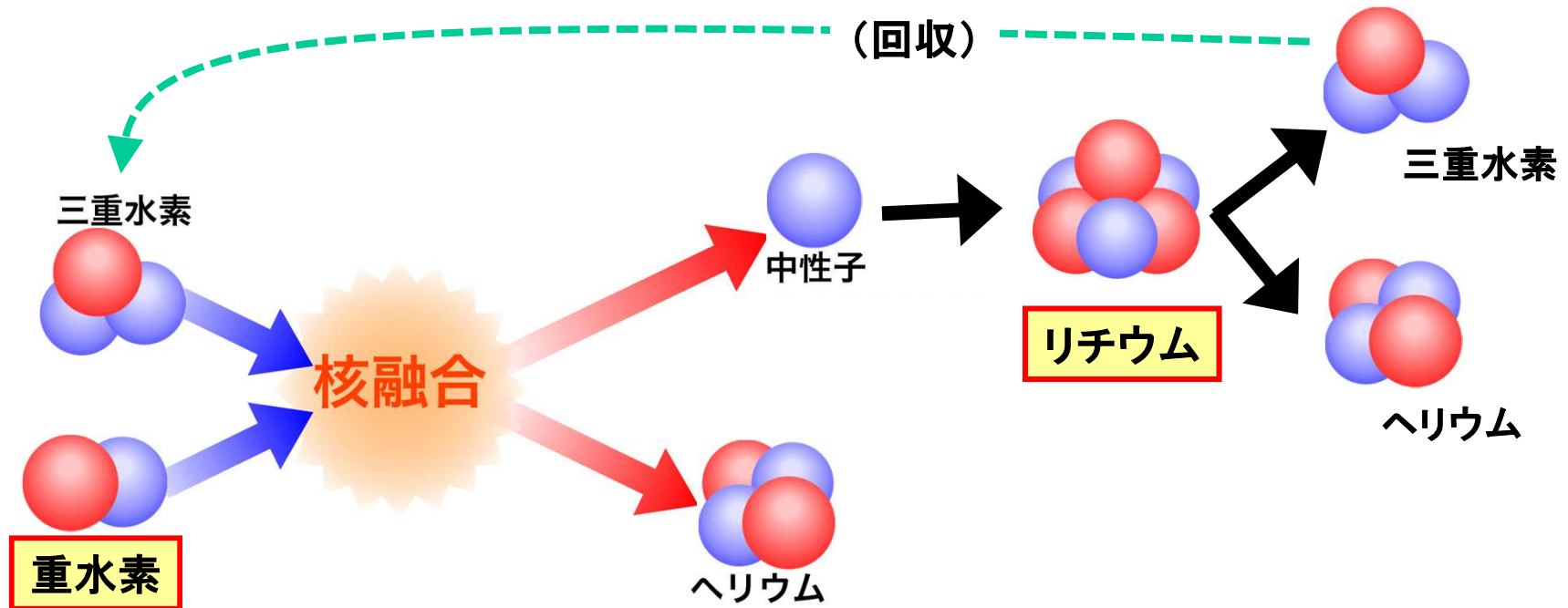
- 核融合の場合 (D-T反応)

化学反応の1000万倍



核エネルギーが
運動エネルギーに変換
(他の物質との衝突で
熱エネルギーに変換)

核融合発電の燃料資源 II



- ・水素の仲間である重水素と三重水素が燃料。
- ・重水素は海から採れる。
- ・三重水素は、自然界にほとんどない

- ・リチウムと核融合生成物の中性子を反応させ、三重水素を生成
- ・実際の燃料は重水素とリチウム、廃棄物はヘリウム

核融合の燃料は海から採れる！



携帯電話の電池
リチウム 0.3g

水 3リットル
重水素 0.1g

水に含まれている水素の
0.015%が重水素

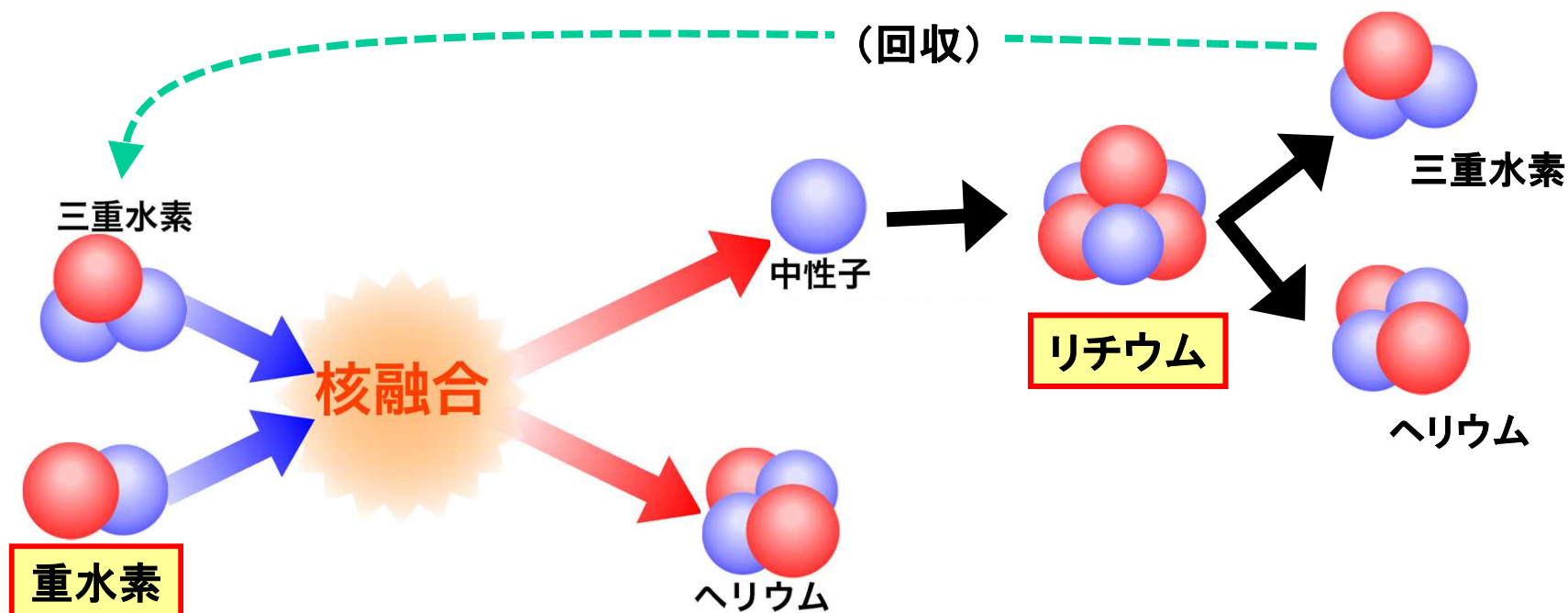
日本の一人当たりの年間電気使用量を発電できる

日本全体でリチウム30トン、水30万トン[50mプール約180個分]

海水中に 約46兆トンの重水素
約2300億トンのリチウム ⇒ 事実上、無尽蔵

・資源の地理的な偏在性が少ない

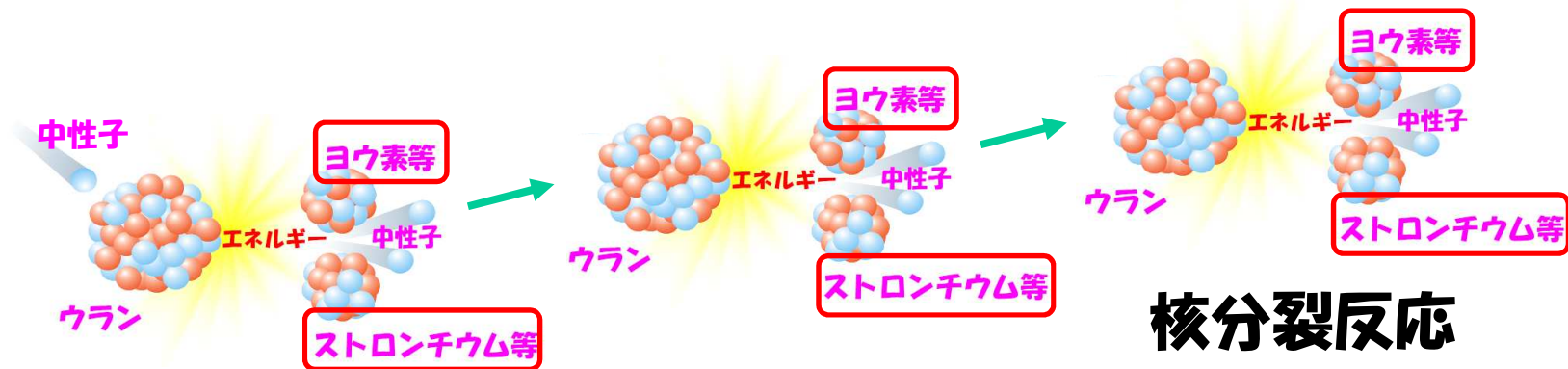
核融合発電の燃料資源のおさらいと安全性



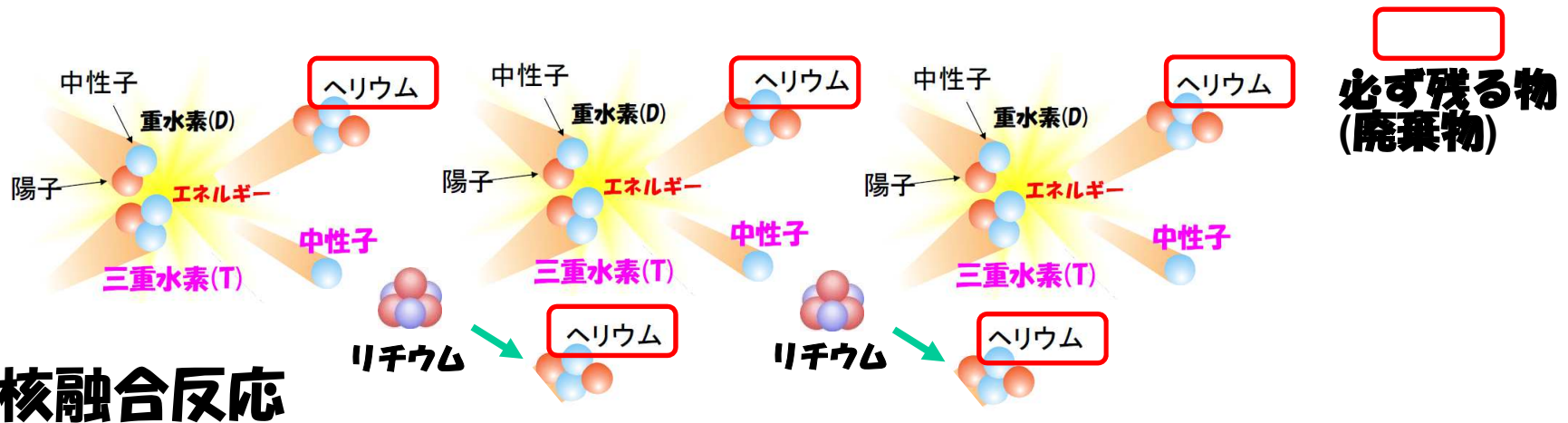
- ・ リチウムと核融合生成物の中性子を反応させ、三重水素を生成
- ・ 燃料は重水素とリチウム、廃棄物はヘリウム

- ・ **リチウムと中性子の反応を効率的に核融合炉の中で行えば、廃棄物は無害のヘリウムのみ。**
- ・ **燃料も無害な重水素とリチウムのみ。**

核融合炉の安全性 -核分裂炉との比較- (I)



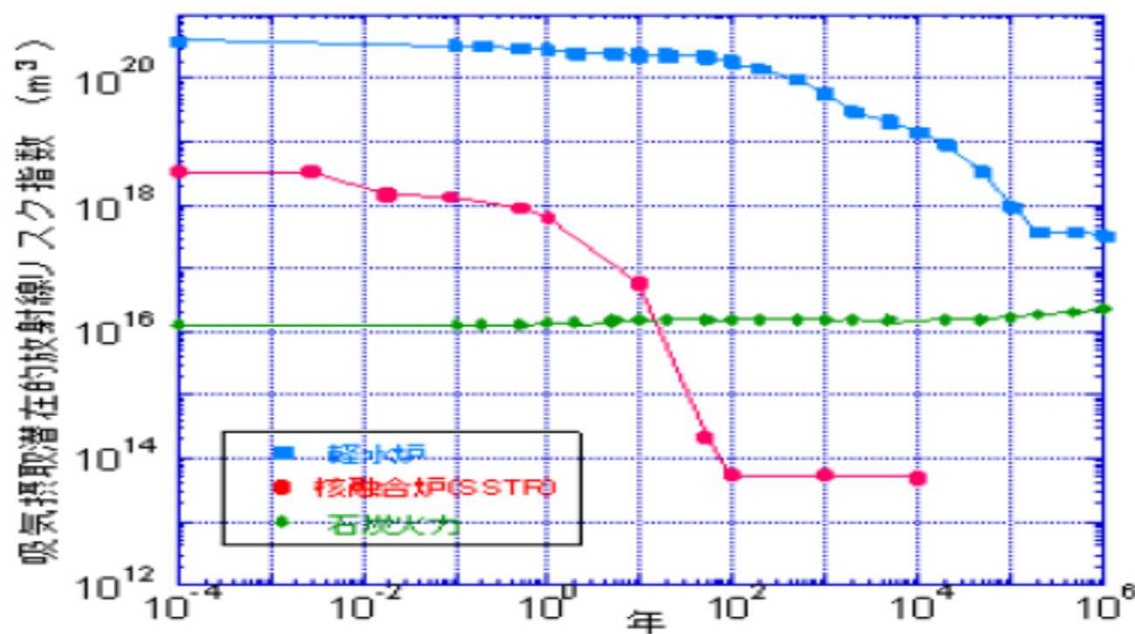
ウランなどの重い原子核が分裂し、より軽い原子核になる反応。灰の核分裂生成物が強い放射線を出す。灰の中性子が壁を放射化することがある。



水素などの軽い原子核が衝突して合体（融合）し、より重い原子核になる反応。灰の中性子が壁を放射化することがある。燃料の三重水素は放射性部室であるが、発電所で作り、作ったものはすぐ消費する。

核融合炉の安全性 (III)

発生するすべての放射性物質を対象とした放射線リスク指数の比較



原子力委員会・核融合会議開発戦略検討分科会、核融合エネルギーの技術的実現性計画の拡がりと裾野としての基礎研究に関する報告書(平成12年5月17日)

核融合発電炉の特徴(まとめ)

燃料資源が豊富で偏りが少ない

海水から燃料(重水素、リチウム)が抽出可能。

(ウラン約100年分、石油約50年分、天然ガス約60年分、石炭約120年分)

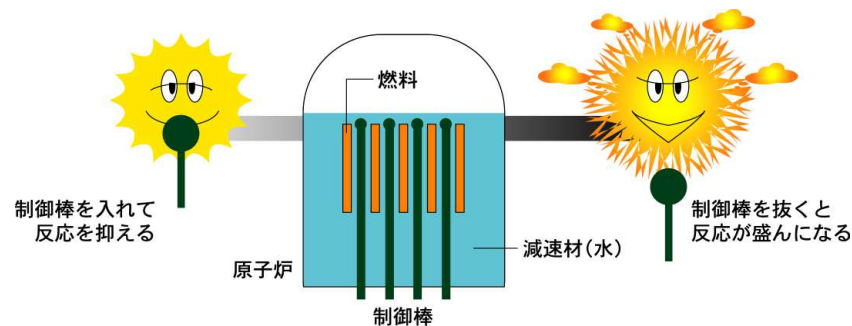
二酸化炭素、窒素酸化物、硫化酸化物等を排出しない

放射線は出るが、核分裂と比較して圧倒的に少ない。

核融合炉は暴走しない。

燃料が気体で燃料の供給が止まると反応も停止。反応維持に高温・高密度状態の維持が必要。=> **核融合炉の実現が難しい**

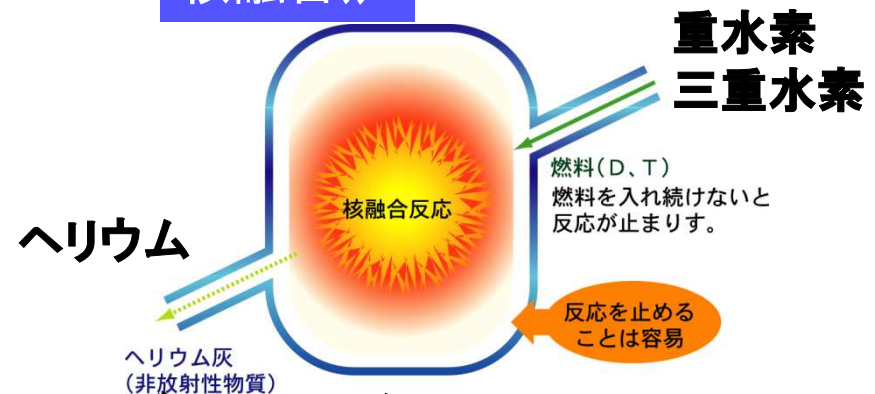
核分裂炉



練炭(炭)と似ている。

制御棒を挿入しても余熱が大きい。

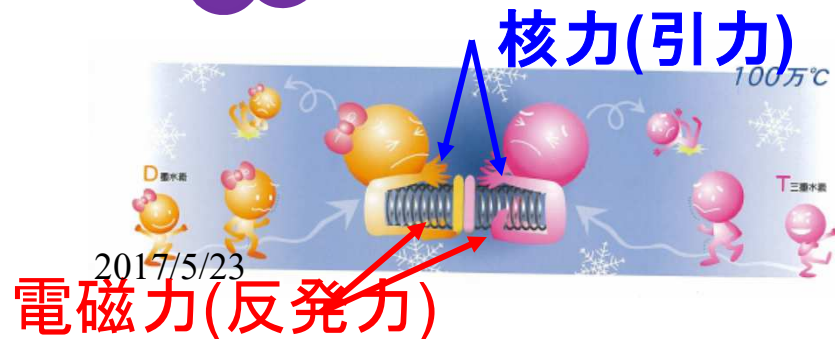
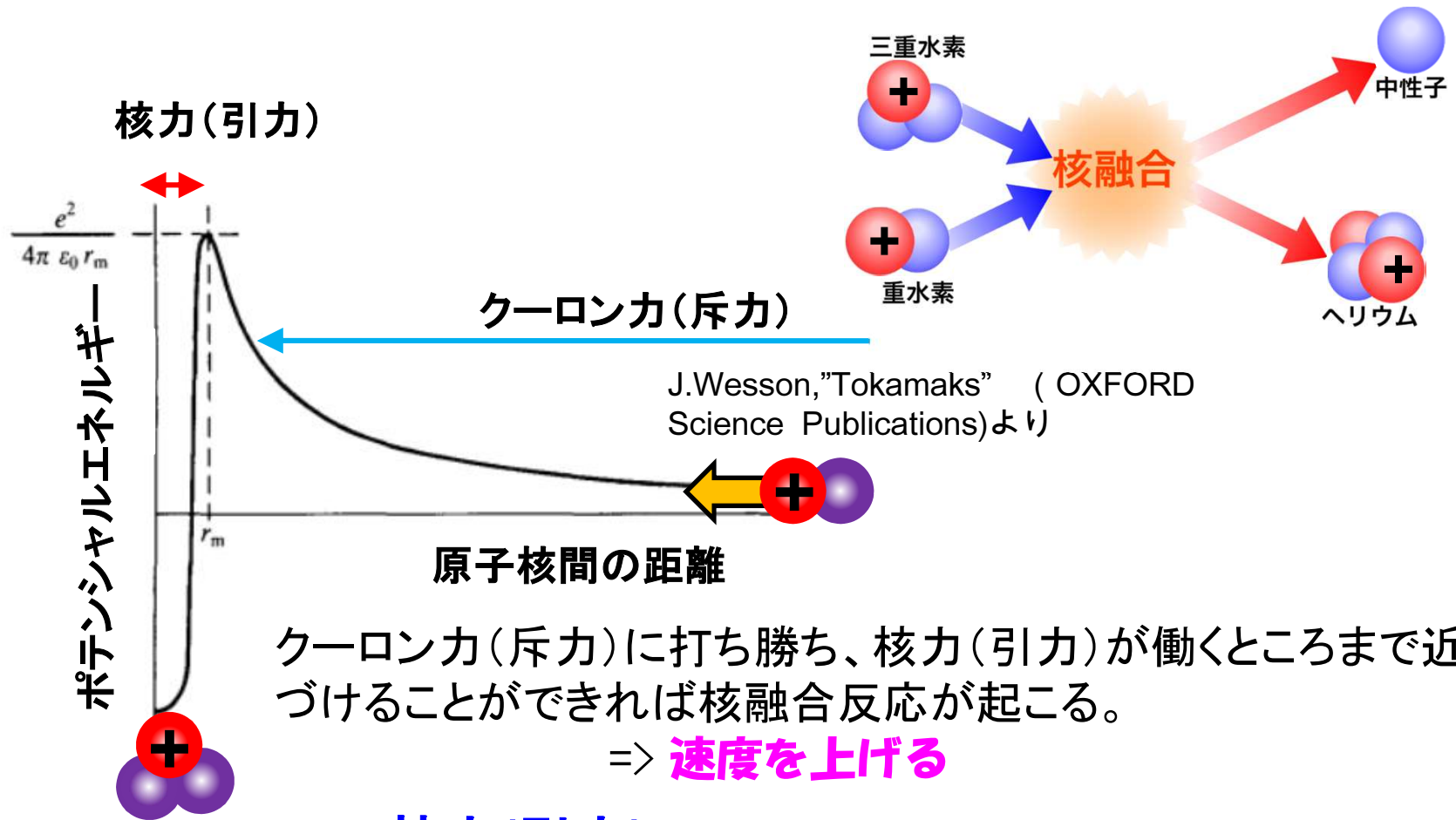
核融合炉



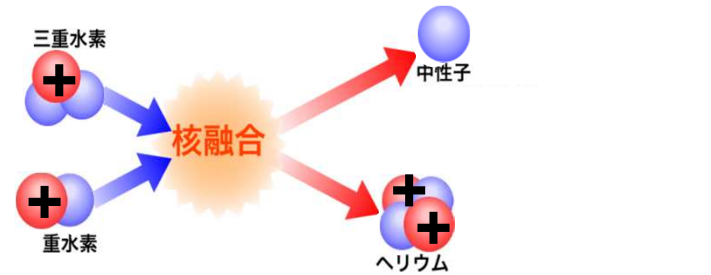
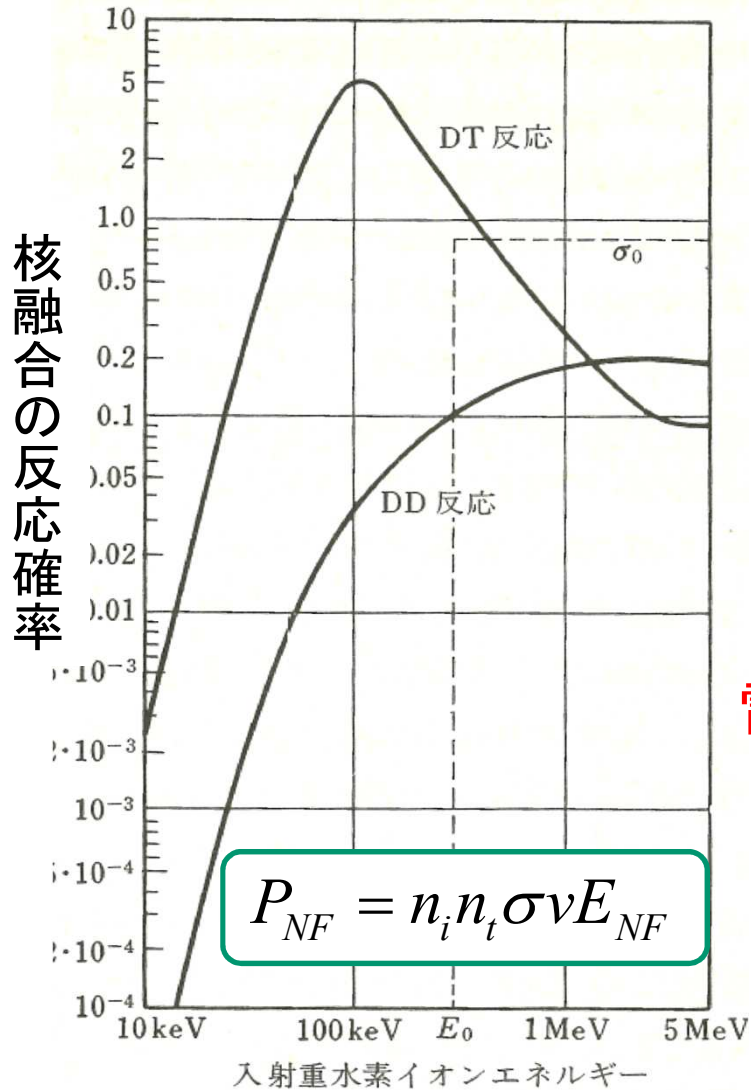
ガスコンロと似ている。

気密が破れると反応が自動停止

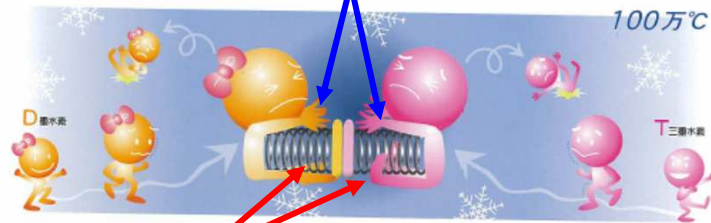
核融合反応を起こすための条件



電磁力に打ち勝ち、核力が働くには、高い運動エネルギーが必要



核力(引力)



電磁力(反発力)



1億度^{5/23} 10億度 相当の運動エネルギー

核融合炉にはプラズマの利用がベスト (I)

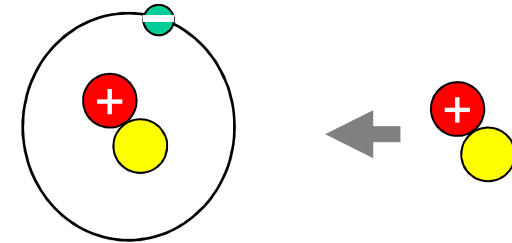
加速器により高エネルギー粒子を発生させれば良い?

(1) 高エネルギービーム → 固体ターゲット

電子とのクーロン衝突の断面積が核融合反応断面積の 10^6 倍ほど大きい。

⇒ほとんどのエネルギーが核外電子の励起に費やされる。

⇒イオンと電子を離れ離れにしておきたい。



(2) 正イオンだけのターゲットは作れるか?

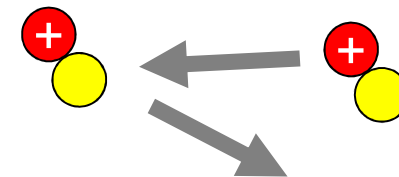
10^{20} 個/ m^3 の正イオンを半径1mの球に集めると、 6×10^{11} V/m もの電場が発生する。

⇒出来るだけ電氣的に中性に保っておきたい。

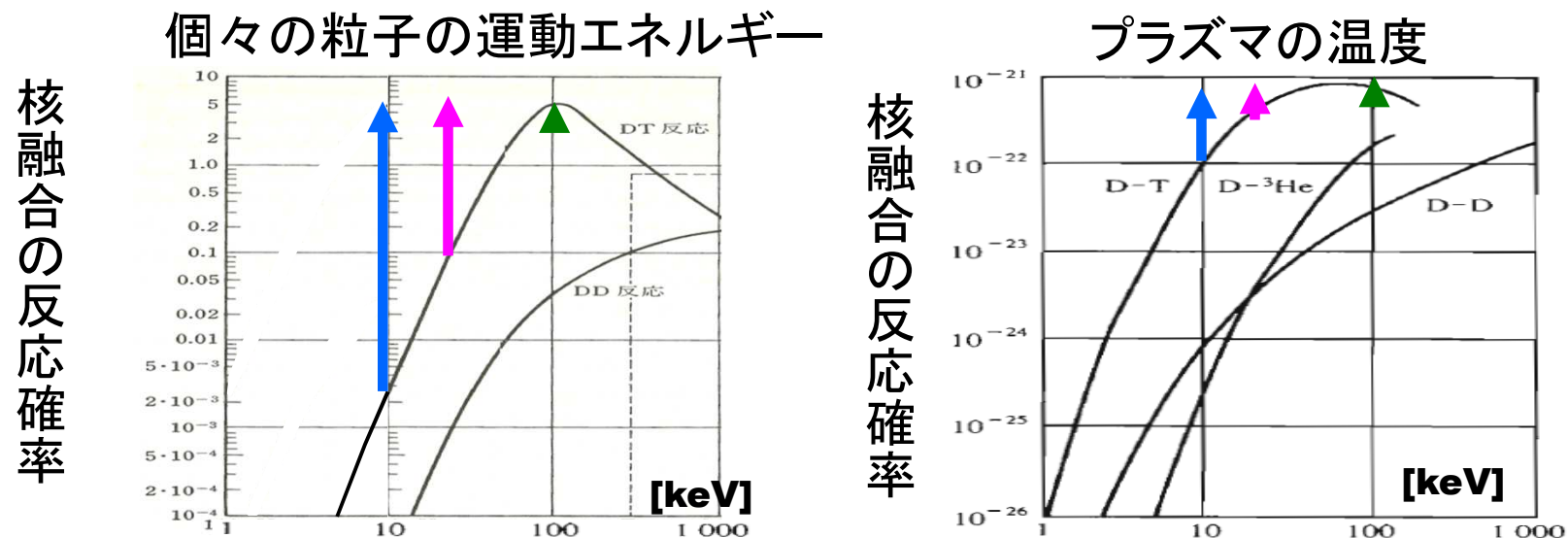
(3) 高エネルギービーム × 低温プラズマターゲット

原子核同士のクーロン力による弾性散乱の断面積が核融合反応断面積の 10^4 倍ほど大きい。

⇒方向が変わったら、改めて同じ方向への加速が必要。



核融合炉には「熱化」プラズマの利用がベスト



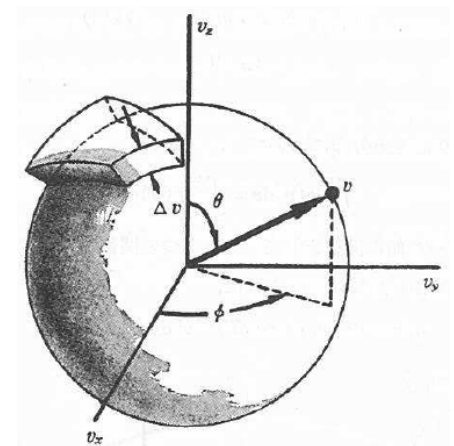
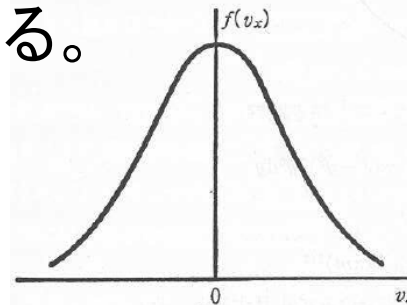
熱化プラズマでは、ビームxビーム衝突より。低い平均運動エネルギー粒子群でも核融合反応率が劇的に増加??

=>熱化プラズマは、ビームに比べて低い平均運動エネルギーの粒子群でも、ビームの平均運動エネルギーより高い運動エネルギーを持つ粒子が断然多い。

温度の定義は？

- ・ 熱平衡状態(衝突が十分大きく、十分時間がたった状態)の粒子群のランダムな運動エネルギーの平均。
- ・ 平均流速がゼロの粒子群の速度分布は等方で、ガウス分布(マックスウェル分布)となる。

$$f = C \exp\left(\frac{mv^2/2}{T}\right)$$

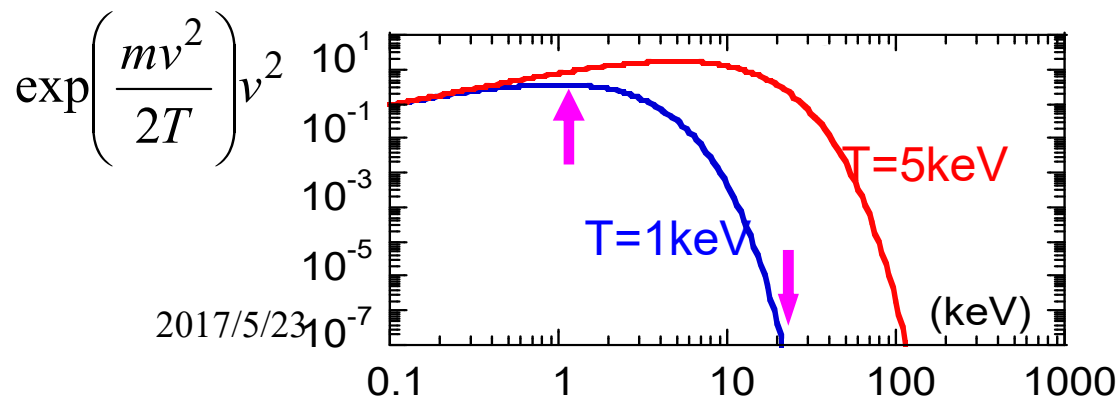


3次元速度空間

$$dv = \sin\theta v^2 dv d\theta d\phi$$

$$n = \int f dv = 4\pi \int f v^2 dv \quad \text{等方な場合}$$

$$= 4\pi C \int \exp\left(\frac{mv^2}{2T}\right) v^2 dv \quad \left(C \Rightarrow n \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1.5} \right)$$



$$\int \frac{mv^2}{2} f dv \Rightarrow \frac{3}{2} nT$$

等方な場合

プラズマの密度、温度、圧力の関係

簡単のため、流速を0として、圧力を考えてみる。

左方向に運動している1個の粒子が壁に与える運動量は

$$2mv_x$$

面積 S_x の壁に単位時間あたりに壁に当たる粒子の個数は密度 n の半分なので、

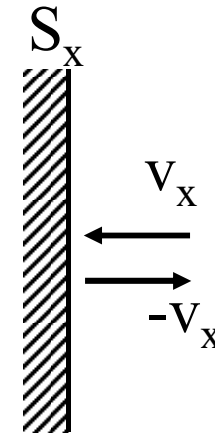
$$v_x S_x n / 2$$

したがって、単位時間あたりに面積 S_x の壁が受ける運動量(力)は、

$$mv_x^2 S_x n$$

等方を仮定し、面積で割ったものが圧力 p なので、

$$p = mn \langle v^2 \rangle = nT$$



圧力は密度と温度の積で表される。また、圧力は単位体積当たりの内部(熱)エネルギー。

温度の単位は？

J; ジュール

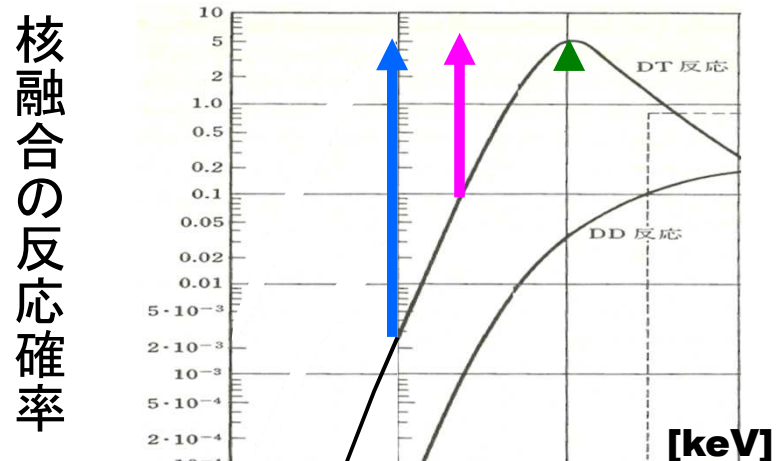
K; ケルビン(水の3重点[気相・液相・固相が共存する熱平衡状態の温度]から定義。 $1\text{K}=1.38\times 10^{-29}\text{J}$)

eV; 電子ボルト(素電荷をもつ荷電粒子が、1 V の電位差を抵抗なしに通過する時に受け取るエネルギー。

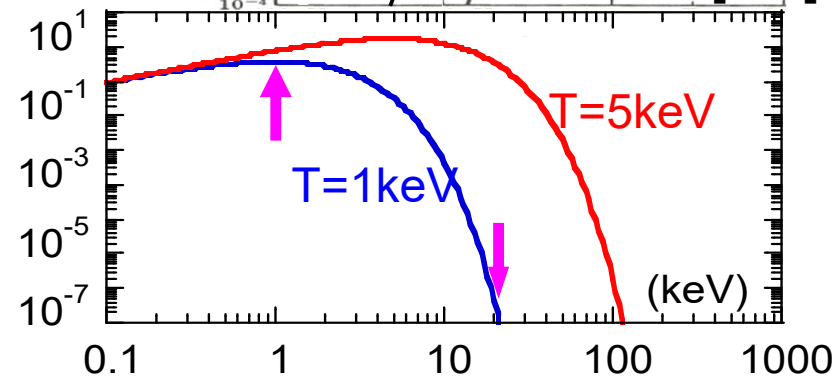
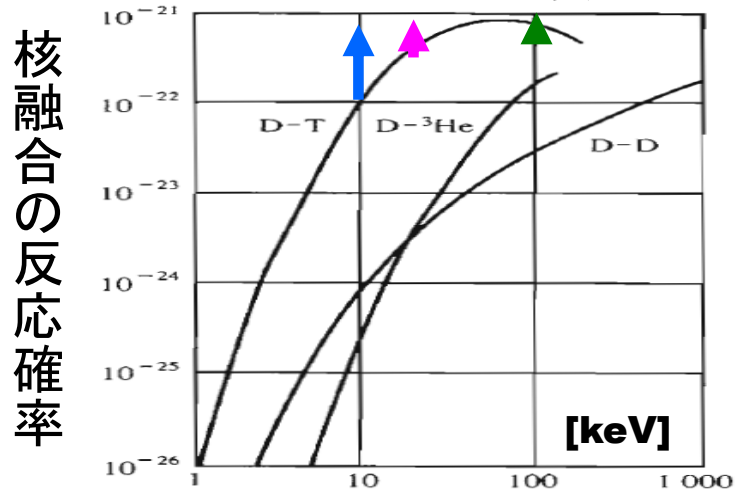
1eV~11,604K)

核融合炉には「熱化」プラズマの利用がベスト

個々の粒子の運動エネルギー



プラズマの温度



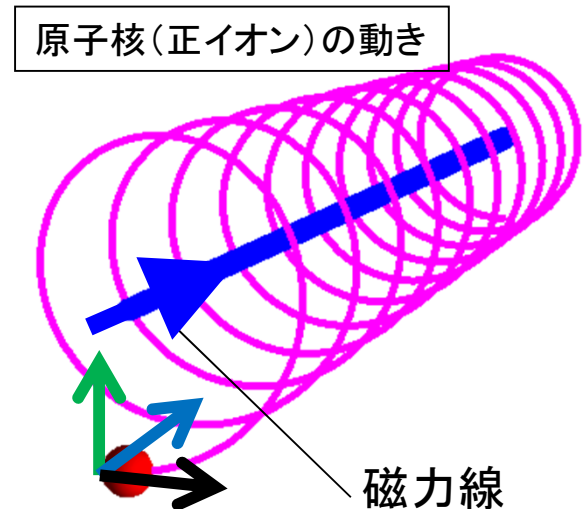
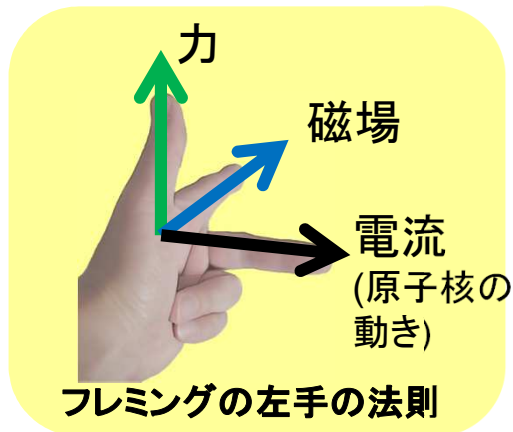
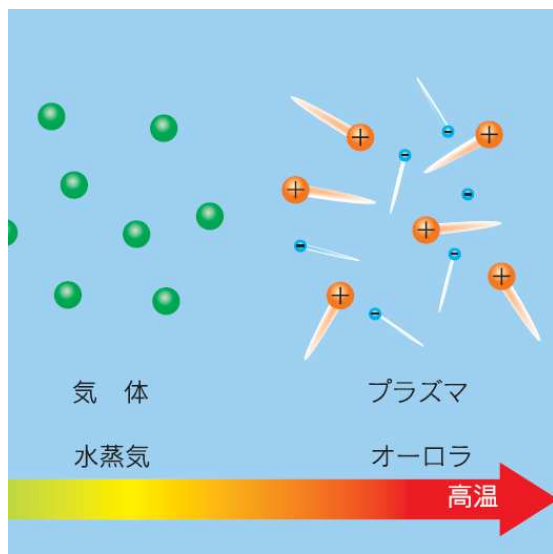
熱化プラズマには、平均より高い運動エネルギーを持つ粒子が数多く存在し、そのため平均運動エネルギーが低い粒子群でも核融合反応率が劇的に増加

$n \sim \varepsilon \exp\left(\frac{-\varepsilon}{T}\right)$ 熱化された粒子の速度分布
 粒子数の最大は $\varepsilon \sim T$ だが、
 $\varepsilon \sim 20T$ でも、最大に対して
 10^{-7} 程度の粒子は存在する

温度を上げるには、単にエネルギーを加えればOK。一方向の加速等は不要
 + 核融合に至らない衝突でも、運動エネルギーは保存されるので温度は下がらない(反応率は同じ)。
 => **エネルギー利用の効率化**

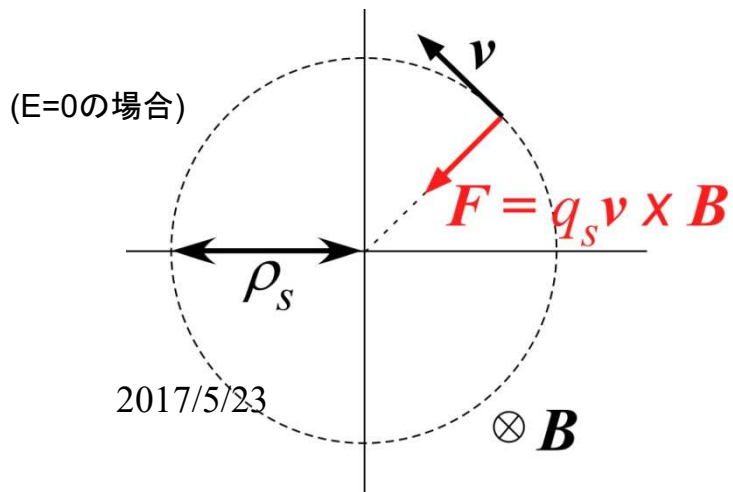
2017/5/23 **それでも、1億度以上の高温プラズマが必要。**

どのようにして高温のプラズマを閉じ込めるか？



磁場や電場を使う

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$



サイクロトロン周波数

$$f_{c,s} = \frac{\omega_{c,s}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{q_s B}{m_s} = \begin{cases} \text{electron: } 28.0 B \text{ (GHz)} \\ \text{ion: } 15.2 \frac{Z}{A} B \text{ (MHz)} \end{cases}$$

Larmor半径

$$\rho_s = \frac{v}{\omega_{c,s}} = \frac{m_s v}{q_s B}$$

2017/5/23

磁場、電場中のプラズマの振る舞いはどう調べる?

流体力学を使う。

流体力学とは?

- ・ 多数の粒子の振舞いを粒子の集団(粒子群;流体)として捉える学問分野で、その力学的性質を調べる学問

プラズマを流体として考える時のキーワードは???

- ・ 粒子群(流体)の性質を個々の粒子毎に調べるのではなく、「密度」、「温度」、「圧力」、「流速」、(「電荷密度」とか「電流」というある重みを持った平均量(統計量; n, T, P, u)で表し、その振舞いを調べる。

個々の粒子が従う式は?

- 変数は, それは何の関数??

$$m_j \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} = q_j (\mathbf{E} + \mathbf{v}_j \times \mathbf{B}) + \sum_i \mathbf{p}_i \delta(t - t_i),$$
$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j(t), \mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x}_j, t), \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}_j, t) \quad \frac{d\mathbf{x}_j}{dt} = \mathbf{v}_j$$

粒子の集団(粒子群;流体)の従う式は?

- 変数は, それは何の関数??

$n = n(\mathbf{x}, t)$; 密度

$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$; 流速

$p = p(\mathbf{x}, t)$; 圧力

- ・連続の式(質量保存則)
- ・運動方程式(運動量保存則)
- ・圧力の式(エネルギー保存則)/
状態方程式(断熱圧縮の法則)

連続の式

左図のような微小体積要素 δV ($=\delta x\delta y\delta z$)を考える。

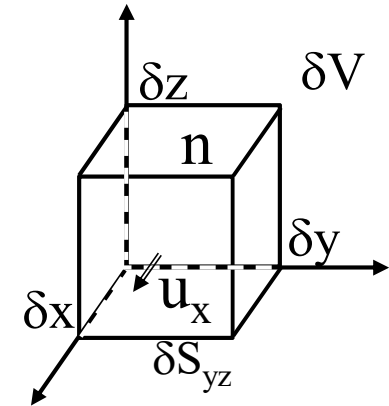
まず、簡単のため体積要素 δV 内の密度 n の粒子が x 方向の速度のみ(v_x)を持っているとする。

この時、ある時間 Δt の間に、 δS_{yz} から失われる粒子数は、

$$n v_x \delta S_{yz} \Delta t$$

これが、体積要素内の粒子数の総量の変化 ΔN ($N=n\delta V$)に等しいことから、

$$-\Delta N = -\Delta(n\delta V) = n u_x \delta S_{yz} \Delta t$$



ここで、 x 方向以外にも速度を持つと考え、その速度を \mathbf{v} で表し、 $\delta \mathbf{S}$ を体積要素の面要素ベクトルとして、最右辺を

$$n u_x \delta S_{yz} \Delta t \implies \sum_{i,j,k=x,y,z} n u_i \delta S_{jk} \Delta t \implies \int_{S(\delta V)} n \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} \Delta t$$

と近似的に置き換える。

また、 $n\delta V \implies \int n dV$, $-\frac{\Delta N}{\Delta t} \implies -\frac{\partial}{\partial t} \int n dV$ から、

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int n dV = \int_{S(\delta V)} n \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} \implies \frac{\partial}{\partial t} \int n dV + \int_{\delta V} \nabla \cdot (n \mathbf{u}) dV = 0$$

上式はすべて δV で成り立つので、

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \mathbf{u}) = 0$$

運動方程式

衝突がない場合、1個の粒子の運動方程式は、次のように書ける。

$$m_j \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} = q_j (\mathbf{E} + \mathbf{v}_j \times \mathbf{B}), \quad \frac{d\mathbf{x}_j}{dt} = \mathbf{v}_j$$

更に熱運動がなく q_j, m_j が一定の場合、密度 n の粒子群の平均速度 \mathbf{V} が満たすべき式は、次式のようにになる。

$$mn \frac{d\mathbf{V}}{dt} = qn (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad \because mn\mathbf{V} \equiv \sum_j m_j n \mathbf{v}_j$$

ここで、 \mathbf{v}_j は t のみの関数であるが、 \mathbf{u} は粒子群と共に移動する座標系での粒子群の平均速度で、 t と粒子群の座標(位置)、 \mathbf{x} の関数であることに注意。この場合、平均速度の t に関する全微分は以下のように表記でき、

$$\frac{d\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$$

運動方程式は次のように書ける。

$$mn \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \right] \mathbf{V} = qn (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$$

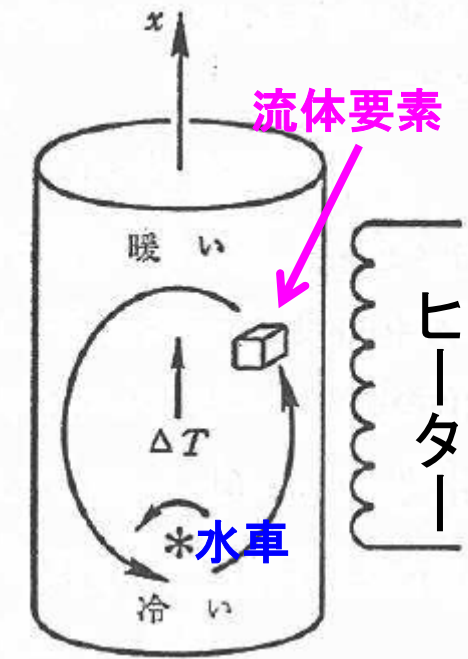
ここで、 $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right)$ は、

対流微分と呼ばれる。 24

運動方程式(II) --対流微分--

対流微分の物理的描像について、説明する。

右図のように右側にヒータのある電熱温水器中の水の流体要素の運動を考える。温水器中では、温められた水は矢印のように上に上がり、冷たい水はそこに沈む。ここで、粒子群の統計量として、温度 T を考えると、 ∇T は上向きとなる。流体要素の位置として、右図のようにヒータ側を考えると、ヒータ一点灯中、この流体要素は動きながら熱せられ、 $dT/dt > 0$ となる。



電熱温水器中の流体要素の運動

この時、更に水車を使って、温水器下部のような流れを作ると、固定された座標の流体要素の温度は、そこからの冷たい水の対流により下げられる。この場合、 $\partial T / \partial x > 0$, $V_x > 0$ であるから、 $V \cdot \nabla T > 0$ となる。

固定された座標の流体要素の温度の時間変化 $\partial T / \partial t$ は、 dT/dt と $V \cdot \nabla T$ のバランスで決まることになるので、

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) T \implies \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{dt} - \mathbf{V} \cdot \nabla T$$

水車の作る流れが十分大きければ、 $\partial T / \partial t < 0$ となり固定された座標の流体要素の温度は下がる。

運動方程式(III) --熱運動と衝突の効果--

熱運動があると、流体要素内外の粒子のランダムな運動によって、流体要素に力が働く。

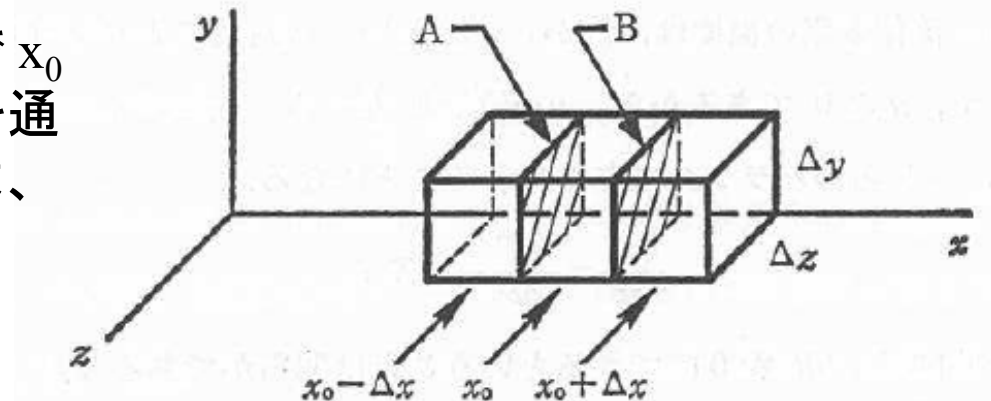
流体要素 $\Delta x \Delta y \Delta z$ の中心の座標を下図のように $(x_0, \Delta y/2, \Delta z/2)$ とし、面AとBとを通る粒子の熱運動のx成分のみを考える。単位時間当たり、速度 v_x で面Aを通過する粒子の数は、以下の通り。

$$\Delta n_v v_x \Delta y \Delta z$$

ここで、 Δn_v は速度 v_x を持つ粒子の単位体積当たりの粒子数。

1個の粒子は運動量 mv_x を持つので x_0 で表される流体要素において面Aを通して要素内に運ばれる運動量 P_{A+} は、

$$\begin{aligned} P_{A+} &= \sum \Delta n_v m v_x^2 \Delta y \Delta z \\ &= \Delta y \Delta z [m \bar{v}_x^2 n / 2]_{x_0 - \Delta x} \end{aligned}$$



ここで、2番目の"="では、 Δn_v について和をとり、 v_x^2 については、平均値 \bar{v}_x^2 を使い、立方体中の密度 n と温度 T をその中心の値で表し、面Aに進むのは、 $x_0 - \Delta x$ で表される流体要素の粒子の内半数が面Aの方に進むことを考慮した。

運動方程式(IV) --熱運動と衝突の効果(II)--

同様に、面Bを通じて運び出される運動量は、 $P_{B+} = \Delta y \Delta z [m \bar{v}_x^2 n / 2]_{x_0}$.

したがって、右の方向に移動する粒子群による運動量の正味の増加は、

$$P_{A+} - P_{B+} = \Delta y \Delta z m / 2 ([n \bar{v}_x^2]_{x_0 - \Delta x} - [n \bar{v}_x^2]_{x_0}) = \Delta y \Delta z m / 2 (-\Delta x) \partial [n \bar{v}_x^2] / \partial x$$

左の方向に移動する粒子群による運動量の正味の増分も上式と同じなので、 x_0 で表される流体要素の運動量の変化は、次式となる。

$$\frac{\partial}{\partial x} (nm V_x) \Delta x \Delta y \Delta z = -m \frac{\partial}{\partial x} [n \bar{v}_x^2] \Delta x \Delta y \Delta z \quad (*)$$

次に、粒子の速度を平均速度 V_x とランダムな速度成分(熱速度) v_{xr} の2つに分けるとする。1次元のマックスウェル分布に対して、温度と熱速度は以下の関係を持つ。

$$m \bar{v}_{xr}^2 / 2 = T / 2$$

したがって、式(*)は、 $\frac{\partial}{\partial x} (nm V_x) = -m \frac{\partial}{\partial x} (n V_x^2 + m \bar{v}_{xr}^2) = -m \frac{\partial}{\partial x} \left(n \left[V_x^2 + \frac{T}{m} \right] \right)$ (**)

連続の式 $\frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (n V_x) = 0$ と $p = nT$ を使って、式(**)を書き下すと、

$$nm \left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (***)$$

運動方程式(V) --熱運動と衝突の効果(III)--

式(***)を3次元化し、電磁力を加えると、次の流体に対する運動方程式が得られる。

$$mn \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \right] \mathbf{V} = qn(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \nabla p$$

中性粒子や他のイオン種、電子などの他の種類の粒子が同時に存在する場合は、その他の粒子種との衝突によっても運動量を失う。衝突により変化する運動量を \mathbf{R} とすると、運動方程式は以下のように書き下せる。

$$mn \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \right] \mathbf{V} = qn(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \nabla p + \mathbf{R}$$

状態方程式(ポワッソンの式/断熱圧縮の法則)

流体の統計量、密度、流速、圧力(又は温度)の振る舞いを調べるには、もう一つ関係式が必要となる。もう一つの関係式として、ここでは、熱力学の状態方程式(ポワッソンの式)を使う。

$$pn^{-\gamma} = \text{const} \quad (*)$$

ここで、 γ は比熱比で、値は自由度により異なり、運動に3次元の自由度がある場合は、 $\gamma=5/3$ となる。

流体方程式

粒子種 j 毎に満たされるべき流体方程式は、まとめると以下のようなになる。

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla \cdot (n_j \mathbf{V}_j) = 0 \quad \text{連続の式}$$

$$m_j n_j \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}_j \cdot \nabla) \right] \mathbf{V}_j = q_j n_j (\mathbf{E} + \mathbf{V}_j \times \mathbf{B}) - \nabla p_j + \mathbf{R}_j \quad \text{運動方程式}$$

$$p_j n_j^{-\gamma} = \text{const} \quad \text{状態方程式(断熱圧縮の式)}$$

次に、電氣的にほぼ中性なプラズマを**一つの流体と考えた時の流体方程式**を考えてみる。ここでは、電子と一価のイオンからなるプラズマを考える。

一流体方程式

電子とイオンの総質量 ρ 、密度差(総電荷密度) σ 、重心速度 \mathbf{u} 、相対速度(電流密度) \mathbf{j} 、総圧力 p を一流体の流体指標として、考えると、電子、イオンの密度 n_i, n_e 、流速 $\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_e$ 、圧力 p_i, p_e を使って以下のように表せる。

$$\rho \equiv m_i n_i + m_e n_e \quad \sigma \equiv e(Zn_i - n_e) \quad p \equiv p_i + p_e$$

$$\mathbf{u} \equiv \frac{m_i n_i \mathbf{V}_i + m_e n_e \mathbf{V}_e}{m_i n_i + m_e n_e} \quad \mathbf{j} \equiv e(Zn_i \mathbf{V}_i - n_e \mathbf{V}_e)$$

ここで、 m_i, m_e は、電子、イオンの質量密度、 Z はイオンの価数。

イオンと電子の連続の式に、それぞれ m_i, m_e を掛けて両辺の和を取ると、

$$\frac{\partial(m_i n_i + m_e n_e)}{\partial t} + \nabla \cdot (m_i n_i \mathbf{V}_i + m_e n_e \mathbf{V}_e) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

質量保存則

同様に、イオンと電子の連続の式に、それぞれ $Ze, -e$ を掛けて両辺の和を取ると、

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

電荷保存則

一流体方程式(II)

イオンと電子の運動量保存の式の両辺の和を取ると、

$$\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right\} \mathbf{u} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p \quad \text{運動方程式}$$

同様に、イオンと電子の連続の式に、それぞれ Ze/m_i , $-e/m_e$ を掛けて両辺の和を取ると、

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{m_i - Zm_e}{n_e m_i + Z^2 n_i m_e} (\mathbf{j} - \sigma \mathbf{u}) \times \mathbf{B} + \frac{m_i \nabla p_e - Zm_e \nabla p_i}{e(n_e m_i + Z^2 n_i m_e)} \\ &= \frac{m_i m_e}{n_e m_i + Z^2 n_i m_e} \left\{ \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{u} - \sigma \mathbf{u} \mathbf{u}) \right\} + \eta \mathbf{j} \end{aligned}$$

イオン、電子の状態方程式は、 $p_i n_i^{-\gamma} = \text{const}$, $p_e n_e^{-\gamma} = \text{const}$

準中性条件より、 $n_i \cong n_e \Rightarrow p_i n_i^{-\gamma} + p_e n_i^{-\gamma} = (p_i + p_e) n_i^{-\gamma} \cong \text{const}$

$$m_i n_i \cong \rho \Rightarrow (p_i + p_e) \rho^{-\gamma} \cong \text{const} \Rightarrow p \rho^{-\gamma} \cong \text{const}$$

$$\left(\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right\} p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \right)$$

$$2017/5/20 \quad \frac{d}{dt} (p \rho^{-\gamma}) = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dt} - \gamma p \rho^{-1} \frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) p - \gamma p \rho^{-1} (-\rho \nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$$

質量保存則から

以上まとめると、電子と一種のイオンからなる**一流体方程式**を得る。

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \text{質量保存則}$$

$$(2) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \text{電荷保存則}$$

$$(3) \quad \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right\} \mathbf{u} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p \quad \text{運動方程式}$$

$$(4) \quad \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{m_i - Zm_e}{e(n_e m_i + Z^2 n_i m_e)} (\mathbf{j} - \sigma \mathbf{u}) \times \mathbf{B} + \frac{m_i \nabla p_e - Zm_e \nabla p_i}{e(n_e m_i + Z^2 n_i m_e)}$$

$$= \frac{m_i m_e}{e^2 (n_e m_i + Z^2 n_i m_e)} \left\{ \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{u} - \sigma \mathbf{u} \mathbf{u}) \right\} + \eta \mathbf{j}$$

$$(5) \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right\} p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{断熱圧縮の式}$$

$$(6, 7) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$(8, 9) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

$$\rho \equiv m_i n_i + m_e n_e \quad \sigma \equiv e(Zn_i - n_e)$$

$$\mathbf{u} \equiv \frac{m_i n_i \mathbf{V}_i + m_e n_e \mathbf{V}_e}{m_i n_i + m_e n_e} \quad \mathbf{j} \equiv e(Zn_i \mathbf{V}_i - n_e \mathbf{V}_e)$$

マックスウェル方程式

電磁流体方程式

一流体方程式を導くにあたって、「圧力が等方、電子と一種のイオンのみで構成されるプラズマを対象とする」等、いくつかの近似を行ったが、それでも方程式は複雑である。

特に、電子は質量がイオンに比べて格段に軽いので、電子の速い時間変化の現象(プラズマ振動等の効果)を一流体方程式は含んでいる。

高温高密度の継続的な閉じ込めを妨げる要因には、後で示すように、大きな電場や磁場の発現により、プラズマが磁場の容器を破壊したり、容器を飛び越えて、「**あっという間**」にプラズマが容器から飛び出す「**電磁流体力学的(MHD)平衡の破れや不安定性**」や磁場の容器から「すきま」から「**じわっ**」とプラズマが漏れ出る「**輸送**」がある。特に「**MHD**」では、**電場によるプラズマの動き**が重要であるので、**流速が E/B で表されるような場合**に、一流体方程式の各項の大きさを評価して、上記の興味がある現象の特性を抽出できる単な方程式群(MHD方程式)を導出する。

各項の大きさを評価するために、プラズマの巨視的な変数が変化する距離の値を L (**特性長**)、プラズマの媒質の運動速度の代表値を V_0 を導入する。すると、プラズマの巨視的な変数が変化する**特性時間**は L/V_0 で表せることができる。

特性長、特性時間を使って各項の効果を評価する手法⇒**次元解析**

各項の効果のorder(大体の大きさ)を評価し、同じorderの効果持つ項だけを取り出す近似手法⇒**ordering**

電磁流体方程式(次元解析やorderingによる項の評価1)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (8) \text{の左辺} \sim \frac{E_0}{L} \quad (8) \text{の右辺} \sim \frac{B_0 V_0}{L} \quad \Rightarrow E_0 \sim B_0 V_0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6) \text{の左辺} \sim \frac{B_0}{L} \quad (6) \text{の右辺第1項} \sim \mu_0 j_0 \quad (6) \text{の右辺第2項} \sim \frac{\mu_0 \epsilon_0 E_0 V_0}{L} = \frac{E_0 V_0}{c^2 B_0} \frac{B_0}{L}$$

$$(6) \text{の右辺第2項} / (6) \text{の左辺} \sim E_0 V_0 / B_0 / c^2 \sim V_0^2 / c^2 \ll 1 \quad \Rightarrow \mu_0 j_0 \sim B_0 / L$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$(1) \text{の左辺第1項} \sim \rho_0 \frac{V_0}{L} \quad (1) \text{の左辺第2項} \sim \frac{1}{L} \rho_0 V_0$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

$$(2) \text{の左辺第1項} \sim \sigma_0 \frac{V_0}{L} = \frac{j_0 \sigma_0 V_0}{L} \quad (2) \text{の左辺第2項} \sim \frac{1}{L} j_0$$

Advance

$$\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right\} \mathbf{u} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p$$

$$(3) \text{の左辺第1項} \sim \rho_0 \frac{V_0}{L} V_0 \quad (3) \text{の左辺第2項} \sim \rho_0 \frac{V_0}{L} V_0$$

$$(3) \text{の右辺第1項} \sim \sigma_0 E_0 = \sigma_0 V_0 B_0 = \frac{\rho_0 V_0^2}{L} \frac{\sigma_0 B_0 L}{\rho_0 V_0} = \frac{\rho_0 V_0^2}{L} \frac{\sigma_0 V_0}{j_0} \frac{B_0}{L \mu_0} \frac{B_0 L}{\rho_0 V_0^2} = \frac{\rho_0 V_0^2}{L} \frac{\sigma_0 V_0}{j_0} \frac{B_0^2}{\rho_0 V_0^2 \mu_0}$$

$$(3) \text{の右辺第2項} \sim j_0 B_0 = \frac{B_0^2}{\mu_0 L} = \frac{\rho_0 V_0^2}{L} \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0 V_0^2} \quad (3) \text{の右辺第3項} \sim \frac{\rho_0 T_0}{m_i L} = \frac{\rho_0 V_0^2}{L} \frac{T_0}{m_i V_0^2}$$

電磁流体方程式(次元解析やorderingによる項の評価2)

Advance

(4)の左辺第1項 $\sim E_0 = B_0 V_0$

(4)の左辺第2項 $\sim B_0 V_0$

(4)の左辺第3項 $\sim \frac{m_i}{e\rho_0} \left(\frac{B_0^2}{\mu_0 L} - \sigma_0 V_0 B_0 \right) \sim V_0 B_0 \left(\frac{B_0^2}{\rho_0 \mu_0} \frac{m_i}{B_0 e} \frac{1}{LV_0} - \frac{\sigma_0}{en_i} \right) = V_0 B_0 \left(\frac{m_e}{n_e e^2 \mu_0} \frac{B_0 e}{m_e} \frac{1}{LV_0} - \frac{\sigma_0}{en_i} \right)$

$= V_0 B_0 \left(\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\varepsilon_0 m_e}{n_e e^2} \frac{B_0 e}{m_e} \frac{1}{LV_0} - \frac{\sigma_0}{en_i} \right) = V_0 B_0 \left(\frac{\Omega_{ce}}{\omega_{pe}} \frac{c^2}{\omega_{pe} LV_0} - \frac{\sigma_0}{en_i} \right)$ $\omega_{pe} \sim 6 \times 10^{11} s^{-1}, \Omega_{ce} \sim 1 \times 10^{11} s^{-1},$
 $c \sim 3 \times 10^8 m/s, V_0 \sim 1 \times 10^4 m/s$

(4)の左辺第4項 $\sim \frac{1}{e\rho_0} \left(m_i \frac{\rho_0 T_0}{m_i L} - m_e \frac{\rho_0 T_0}{m_e L} \right) \sim B_0 V_0 \frac{T_0 / Le}{B_0 V_0} \sim B_0 V_0 \frac{E_0}{B_0 V_0}$

(4)の右辺第1~4項 $\sim \frac{m_i m_e}{e^2 \rho_0} \left(\frac{j_0 V_0}{L} + \frac{V_0 j_0}{L} + \frac{j_0 V_0}{L} - \frac{\sigma_0 V_0^2}{L} \right) \sim \frac{m_i m_e}{e^2 \rho_0} \left(\frac{B_0 V_0}{\mu_0 L^2} - \frac{\sigma_0 V_0^2}{L} \right)$

$\sim B_0 V_0 \left(\frac{\varepsilon_0 m_e}{e^2 n_e} \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 L^2} - \frac{\varepsilon_0 m_e}{e^2 n_e} \frac{\sigma_0 V_0}{\varepsilon_0 L B_0} \right) = B_0 V_0 \left(\frac{c^2 / L^2}{\omega_{pe}^2} - \frac{c^2 / L^2}{\omega_{pe}^2} \frac{\sigma_0 L V_0}{\varepsilon_0 B_0} \right)$

(4)の右辺第5項 $\sim \eta j_0 = \frac{m_i m_e \nu_{ei}}{e^2 \rho_0} \frac{B_0}{\mu_0 L} \sim \frac{\varepsilon_0 m_e}{e^2 n_e} \frac{B_0 V_0}{\varepsilon_0 \mu_0 L^2} \frac{L \nu_{ei}}{V_0} = B_0 V_0 \frac{c^2 / L^2}{\omega_{pe}^2} \frac{L \nu_{ei}}{V_0}$

電磁流体方程式(次元解析やorderingによる項の評価3)

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

$$(3) \quad \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right\} \mathbf{u} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p$$

$$(4) \quad \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{m_i - Zm_e}{e(n_e m_i + Z^2 n_i m_e)} (\mathbf{j} - \sigma \mathbf{u}) \times \mathbf{B} + \frac{m_i \nabla p_e - Zm_e \nabla p_i}{e(n_e m_i + Z^2 n_i m_e)}$$

$$= \frac{m_i m_e}{e^2 (n_e m_i + Z^2 n_i m_e)} \left\{ \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{u} - \sigma \mathbf{u} \mathbf{u}) \right\} + \eta \mathbf{j}$$

$$(5) \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right\} p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$(6, 7) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$(8, 9) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

$$\rho \equiv m_i n_i + m_e n_e \quad \sigma \equiv e(Zn_i - n_e)$$

$$\mathbf{u} \equiv \frac{m_i n_i \mathbf{V}_i + m_e n_e \mathbf{V}_e}{m_i n_i + m_e n_e} \quad \mathbf{j} \equiv e(Zn_i \mathbf{V}_i - n_e \mathbf{V}_e)$$

電磁流体方程式(近似)

整理すると、

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

$$(3) \quad \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right\} \mathbf{u} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p$$

$$(4) \quad \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{n_e e} + \frac{\nabla p_e}{en_e} = \eta \mathbf{j}$$

$$(5) \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right\} p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$(6, 7) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$(8, 9) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

$$(4) \text{式で、} \left| \frac{\nabla p_e}{en_e} \right| / |\mathbf{u} \times \mathbf{B}| \sim \left| \frac{n_e T_e / a}{en_e v_{thi} B} \right| \sim \left| \frac{T_i / a}{e v_{thi} B} \right| \sim \frac{1/a}{1/r_{Li}} \ll 1$$

$$\left| \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{en_e \mathbf{u} \times \mathbf{B}} \right| \sim \left| \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} / \mu_0}{en_e v_{thi} B} \right| \sim \left| \frac{\omega_{pe}^2 a \omega_{ce} v_{thi}}{\omega_{ce}^2 c^2} \right| \sim \left| \frac{\omega_{pe}^2 a m_i v_{thi}^2}{\omega_{ce}^2 r_{Li} m_e c^2} \right| \ll 1$$

2017/5/23

$$\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{n_e e} + \frac{\nabla p_e}{en_e} \Rightarrow 0$$

ここで、式(6)の両辺の発散を取ると

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

したがって、式(2)から、

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

となってしまうので、この条件は厳しすぎる条件となっている。一方、式(9)、(4)から、

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \sigma / \partial t}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \nabla \cdot \left(\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{n_e e} + \frac{\nabla p_e}{n_e e} \right) \right\} \neq 0$$

となり矛盾。

以上のことから、式(2)は条件式からはずす。また、近似的に $\sigma=0$ が成り立っているとして、式(3)の σE を0と近似する。

σ の値が知りたいときは、(9)式から評価する。

電磁流体方程式(まとめ)

電磁流体近似に基づく方程式

(MHD[Magneto-Hydro-Dynamics]方程式)

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$(2) \quad \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right\} \mathbf{u} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p$$

$$(3) \quad \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j}$$

一般化されたオーム則

$$(4) \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right\} p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$(5) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j},$$

$$(6) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$(7) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$(8) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, (\text{初期条件})$$

抵抗率 η が0の場合は、**理想MHD方程式**と呼ぶ。

2017/5/23

変数は、以下のスカラー量3、ベクトル量4の合計15である。

$$\rho, \mathbf{u}, \mathbf{j}, p, \mathbf{B}, \mathbf{E}, \sigma$$

一方、式は16個あるので、式(8)は、初期条件の一つと見なす。

特徴

- ・ 磁力線を横切る流体の重心速度は、 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトで決まる。

$$u_{\perp} \sim E / B$$

- ・ $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト速度は、イオンの熱速度同程度になる場合まで考える。

$$u_{\perp} \sim v_{thi}$$

磁力線を横切る大きな流れが引き起こす現象の性質を調べる。

MHD平衡の破れ、MHD不安定性が高温高密度プラズマの閉じ込めを妨げる。

MHD平衡を決める式

ここでは、静止平衡状態を考える。静止平衡状態とは、プラズマの流速が0で、プラズマ諸量の時間変化がない状態を言う。
理想MHD方程式で、この条件を適用すると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right\} \mathbf{u} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right\} p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, (\text{初期条件})$$



$$0 + \nabla \cdot (\rho 0) = 0$$

$$\rho \{0 + 0 \cdot \nabla\} 0 = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0$$

$$\{0 + 0 \cdot \nabla\} p + \gamma p \nabla \cdot 0 = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, (\text{初期条件})$$

∴ 静止平衡状態が成り立つ条件は、

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p, \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p$ より、 $\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0$

$\mathbf{j} \cdot \nabla p = 0$

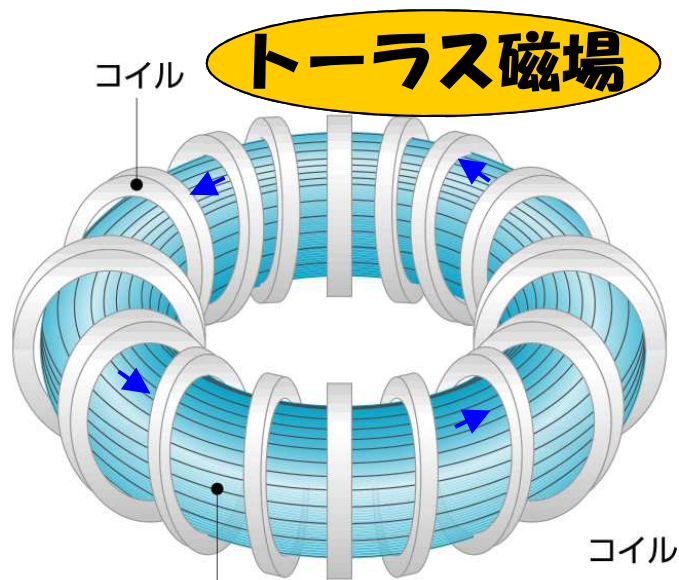
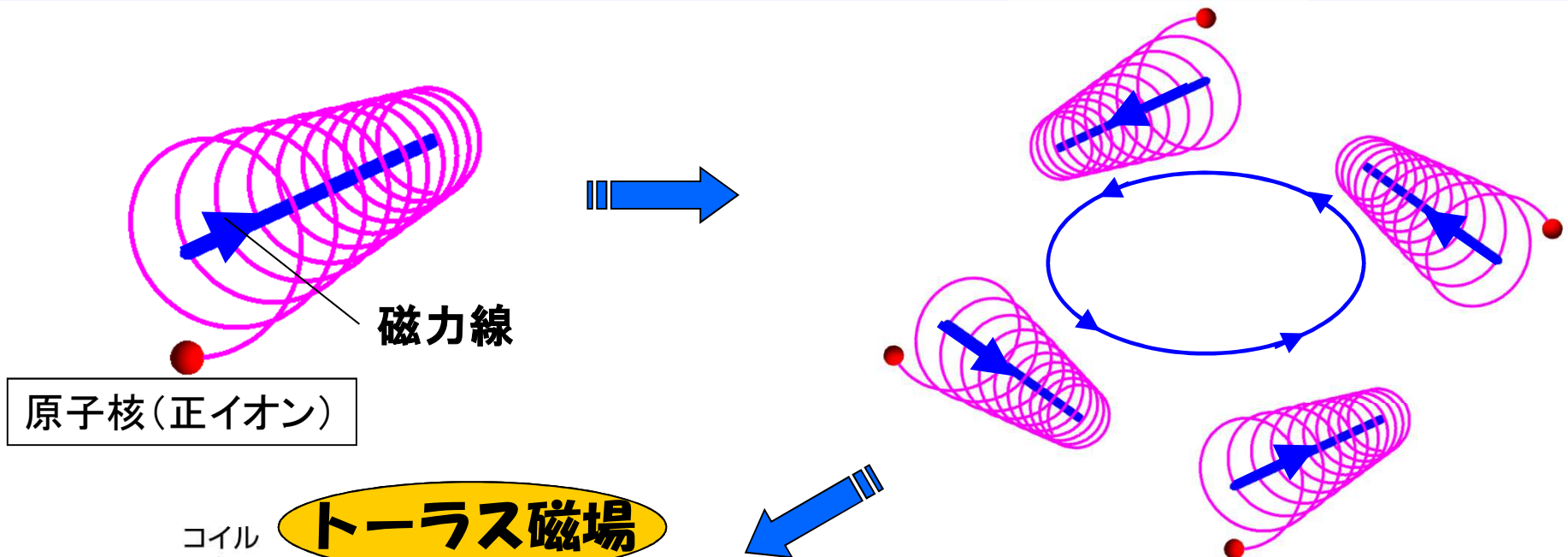


等圧力面の法線ベクトルは、常に磁力線と直交。等圧面は磁気面と一致。
電流は等圧面に沿って流れる。

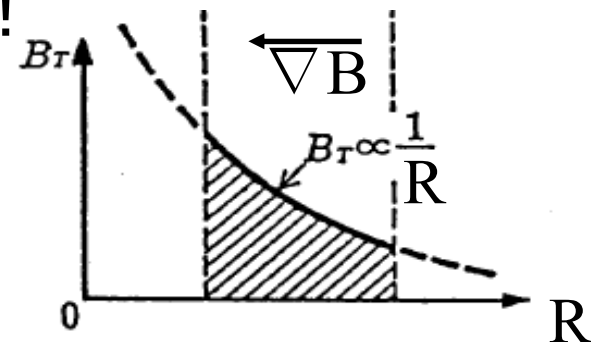
静止平衡の式

2017/5/23(電磁力とプラズマ圧力の釣り合い)

磁場によるプラズマの閉じ込め



端が無いように、繋げて環状(トーラス)にしてやればよい!



単純トーラス磁場では、プラズマを閉じ込められない

静止平衡の式

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p$$

$$\mathbf{j}_\perp = \frac{\mathbf{B} \times \nabla p}{B^2}$$

$$j_R = \frac{|\nabla p|}{B}$$

ここで、磁場に $B = R_0 B_0 / R$ の不均一性があったとする。

$$j_R = R \frac{|\nabla p|}{R_0 B_0}$$

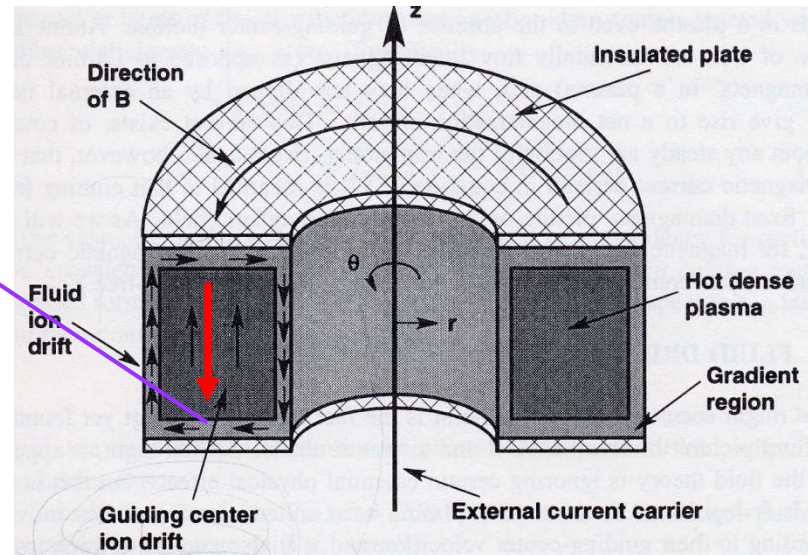
単純トーラス (z軸に電流がある時の磁場配位) で達成される

トーラス外側に行くほど電流密度大

このような電流の発散を考えると

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_\perp = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \times R \frac{|\nabla p|}{R_0 B_0} \right) \approx \frac{2 \nabla p}{R B} \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma}{\partial t} \neq 0 \text{ or } \mathbf{j}_{\parallel} \neq 0$$



一方、電子と単一イオンからなるプラズマの「連続の式」

$$\frac{\partial n_{i,e}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{i,e} \mathbf{v}_{i,e}) = 0 \text{ から}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

電荷保存則

$$\left(\because \sigma \equiv \sum_{j=i,e} q_j n_j, \mathbf{j} \equiv \sum_{j=i,e} q_j n_j \mathbf{v}_j \right)$$

1. ベクトル公式

f, g はスカラー, A, B などはベクトル, T はテンソルとする.

$$(1) \quad A \cdot B \times C = B \times C \cdot A = B \cdot C \times A = C \cdot A \times B$$

$$(2) \quad A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$$

$$(3) \quad (A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C)$$

$$(4) \quad (A \times B) \times (C \times D) = (A \times B \cdot D)C - (A \times B \cdot C)D$$

$$(5) \quad \nabla(fg) = \nabla(gf) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$(6) \quad \nabla \cdot fA = f\nabla \cdot A + A \cdot \nabla f$$

$$(7) \quad \nabla \times fA = f\nabla \times A + \nabla f \times A$$

$$(8) \quad \nabla \cdot (A \times B) = B \cdot \nabla \times A - A \cdot \nabla \times B$$

$$(9) \quad \nabla \times (A \times B) = A(\nabla \cdot B) - B(\nabla \cdot A) + (B \cdot \nabla)A - (A \cdot \nabla)B$$

$$(10) \quad \nabla(A \cdot B) = A \times (\nabla \times B) + B \times (\nabla \times A) + (A \cdot \nabla)B + (B \cdot \nabla)A$$

$$(11) \quad \nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$$

$$(12) \quad \nabla^2 A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla \times \nabla \times A$$

$$(13) \quad \nabla \times \nabla f = 0$$

$$(14) \quad \nabla \cdot \nabla \times A = 0$$

$$(15) \quad \nabla \cdot (AB) = (A \cdot \nabla)B + (\nabla \cdot A)B$$

$$(16) \quad \nabla \cdot (fT) = \nabla f \cdot T + f\nabla \cdot T$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p \Rightarrow \mathbf{B} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \times \nabla p$$

$$\mathbf{B} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = B^2 \mathbf{j} - (\mathbf{j} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} = B^2 \mathbf{j} - B^2 j_{\parallel} \mathbf{b} = B^2 (\mathbf{j} - j_{\parallel} \mathbf{b}) = B^2 \mathbf{j}_{\perp}$$

2. 円筒座標系であらわしたベクトルの成分

(1) 勾配

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

(2) 発散

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

(3) 回転

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

(4) ラプラシアン

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

(5) ベクトルのラプラシアン

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \left(\nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{A_r}{r^2} \right) \mathbf{e}_r + \left(\nabla^2 A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r^2} \right) \mathbf{e}_\theta + \nabla^2 A_z \mathbf{e}_z$$

単純トーラス磁場では、プラズマを閉じ込められない (II)

静止平衡の式

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p$$

$$\mathbf{j}_\perp = \frac{\mathbf{B} \times \nabla p}{B^2}$$

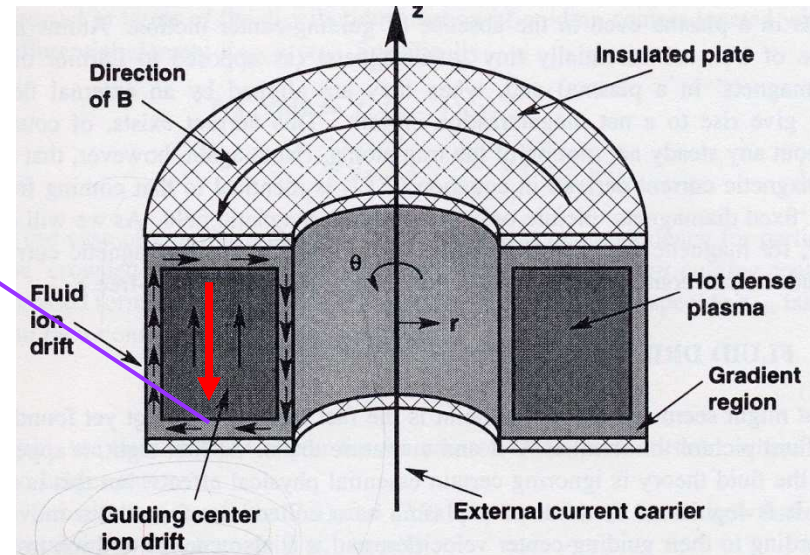
$$j_R = \frac{|\nabla p|}{B}$$

ここで、磁場に $B = R_0 B_0 / R$ の不均一性があったとする。

$$j_R = R \frac{|\nabla p|}{R_0 B_0}$$

単純トーラス (z軸に電流がある時の磁場配位) で達成される

トーラス外側に行くほど電流密度大



このような電流の発散を考えると

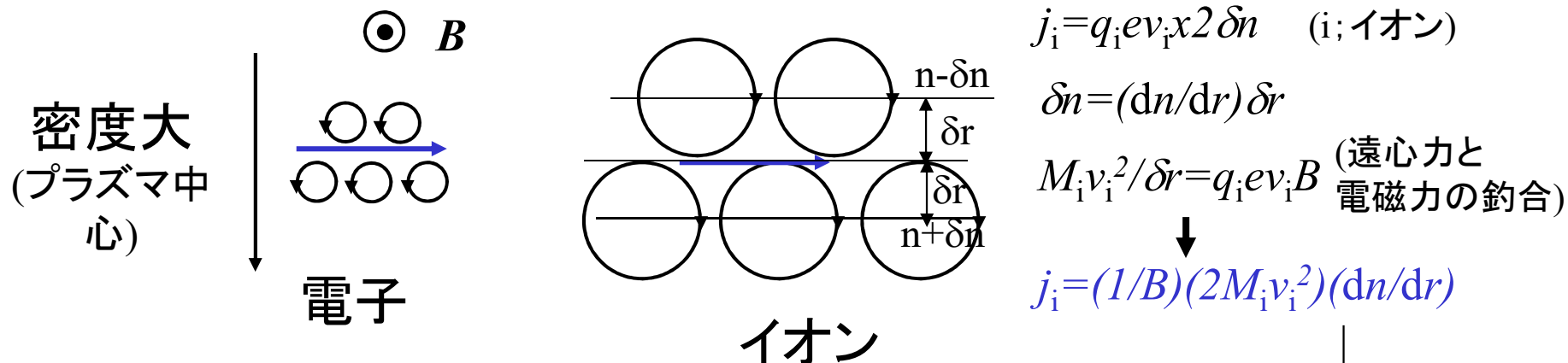
$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \times R \frac{|\nabla p|}{R_0 B_0} \right) \approx \frac{2 \nabla p}{RB} \neq 0$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma}{\partial t} \neq 0 \text{ or } \mathbf{j}_{\parallel} \neq 0$$

トーラスの上下で電荷が発生 ($\partial \sigma / \partial t \neq 0$)
 或いは、磁力線方向の電流が必要。

2017/5/23 \Rightarrow 磁力線の連結による電荷の短絡(電流)が必要

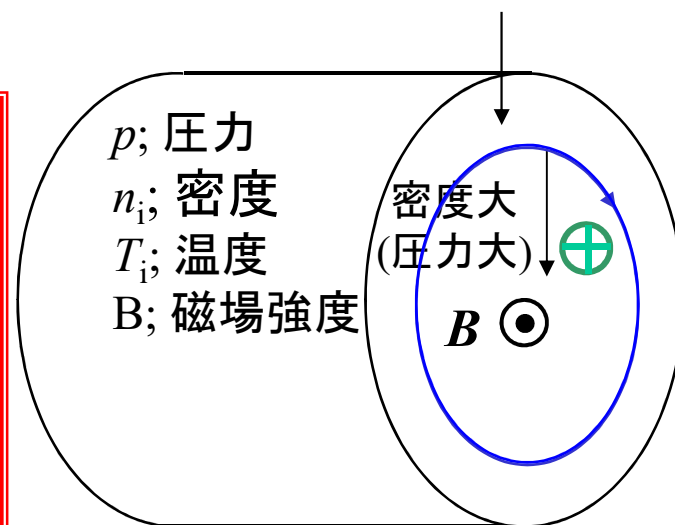
磁場中のプラズマに、密度・温度(圧力)勾配があると 磁場に垂直な電流が流れる理由



温度の勾配がある時は、(1)式で、 δv_i が存在するので、同様に電流が流れる($T_i = M_i v_i^2 / 2$ に注意)。電子に関しても、(1)式を考え、 $p = (n_e T_e + n_i T_i)$ とすると、流れる電流値の総和は

$$j \propto \left| \frac{1}{B} \frac{\partial p}{\partial r} \right|$$

流れる向きは、元の磁場を小さくする方向 => **反磁性電流**



磁場、圧力勾配の両方に垂直で、 dp/dr に比例、 B に反比例 =>

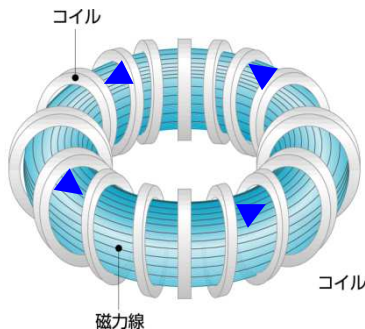
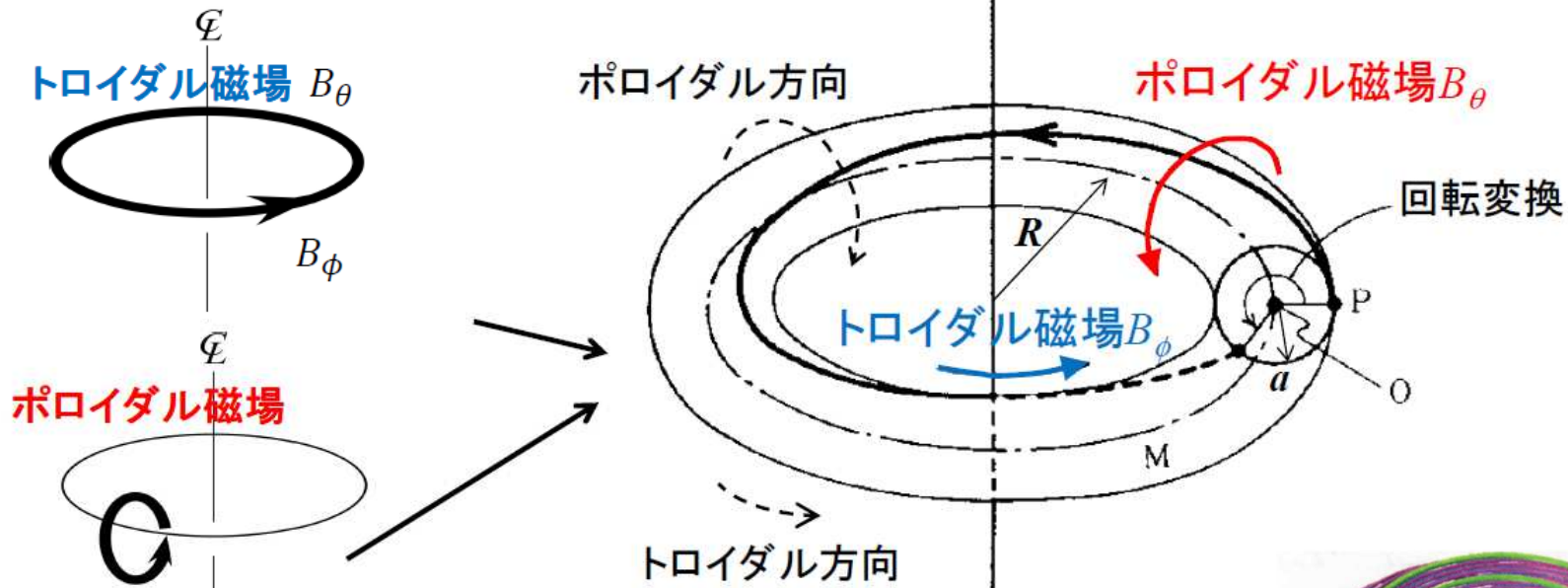
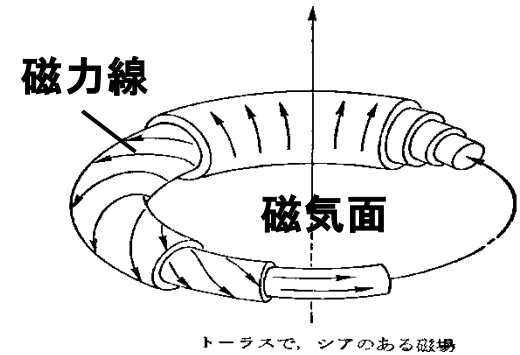
$$\mathbf{j}_\perp = \frac{\mathbf{B} \times \nabla p}{B^2}$$

磁場中のプラズマでは、密度、温度(圧力)勾配があると電流が流れる

どのようにして高温のプラズマを閉じ込めるのか？

トーラス磁場による閉じ込め

荷電分離を防ぐために、トーラスの上下を磁力線でつなぐ。
(荷電粒子は磁力線方向には動きやすい)



磁力線(螺旋形状の縦糸)で作ったドーナツ状のかご

磁気面



閉じ込め容器は、層状のかごの集まり

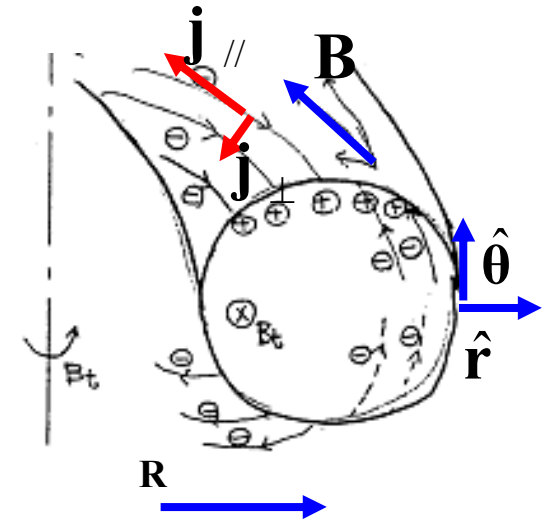
磁力線に沿った電流

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{//} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_{\perp} \Rightarrow \frac{\partial j_{//}}{\partial s} = 2\nabla p \cdot \left(\frac{\nabla B \times \mathbf{b}}{B^2} \right) \quad (\mathbf{b} \equiv \mathbf{B}/B)$$

$$\Rightarrow \frac{B_{\theta}}{aB} \frac{\partial j_{//}}{\partial \theta} \sim \frac{\partial p}{\partial r} \frac{1}{R_0 B_0} \sin \theta. \quad \left(\because t = \frac{1}{q} \equiv \frac{B_{\theta}/r}{B_{\phi}/R} \right)$$

$$\Rightarrow j_{//} \sim -\frac{1}{t B_0} \frac{\partial p}{\partial r} \cos \theta. \quad (\because B_{\phi} \sim B_0, R \sim R_0)$$

$$\nabla p \sim \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \nabla B \sim B_0 \frac{\partial}{\partial \theta} (1 - \varepsilon \cos \theta). \quad \left(\varepsilon \equiv \frac{r}{R} \right)$$



磁力線方向の $j_{//}$ (平衡電流)は, t (回転変換/磁力線のねじれ具合)が大きいほど小さくてよい. また、電流の向きはトーラスの外側と内側で反転。

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \theta} \sim \frac{B_{\theta}}{aB} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad \left(\because \frac{ds}{B} = \frac{a d\theta}{B_{\theta}} \right)$$

$j_{//}$ による磁場; $\mu_0 j_{//} L$ $\because \mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$

元の磁場に与える影響は、 $\mu_0 j_{//} L / B_0$

$$\frac{L \mu_0 j_{//}}{B_0} \sim -\frac{2\pi L \mu_0}{t B_0^2} \frac{\partial p}{\partial r} \cos \theta \Rightarrow \frac{L \mu_0 j_{//}}{B_0} \sim \frac{1}{t} \frac{p}{B_0^2 / \mu_0} \quad \beta$$

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{\mathbf{B} \times \nabla p}{B^2} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{j}_{\perp} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{B} \times \nabla p}{B^2} \right)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{B} \times \nabla p}{B^2} \right) = \nabla p \cdot \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{B^2} \right) - \frac{\mathbf{B}}{B^2} \cdot \nabla \times \nabla p \quad \rightarrow 0$$

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{B^2} \right) = \nabla \left(\frac{1}{B^2} \right) \times \mathbf{B} + \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{B^2}$$

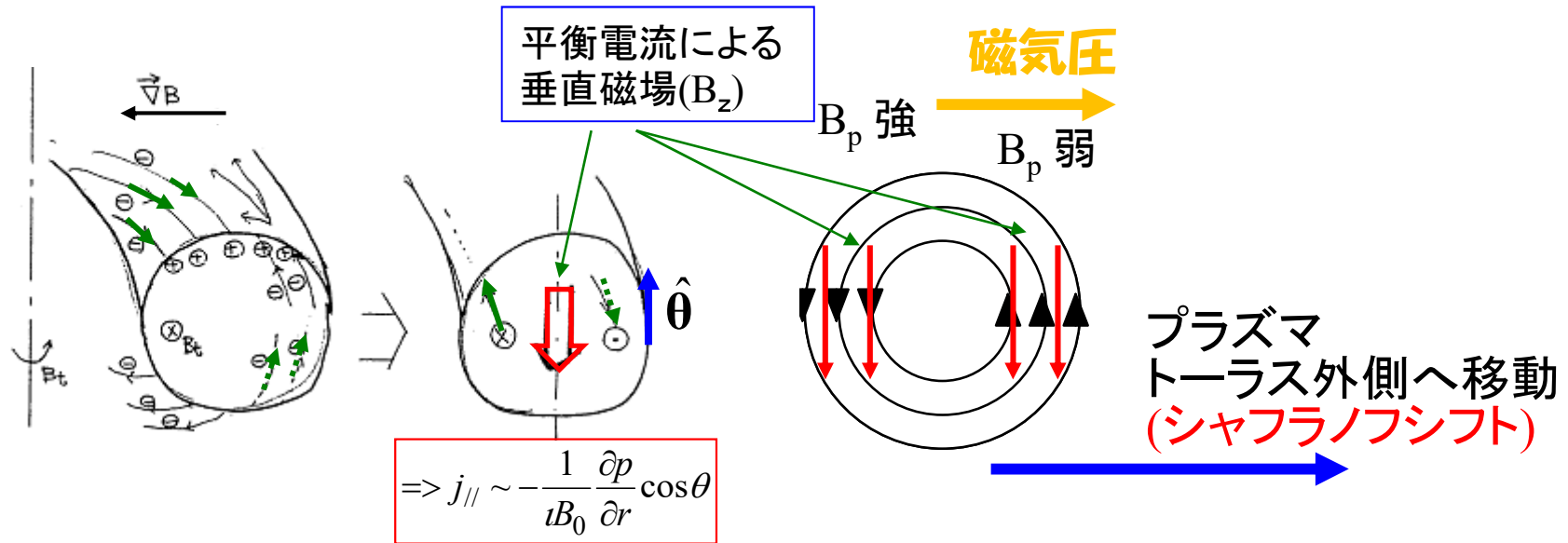
$$\because \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p$$

$$\Rightarrow \mathbf{j} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = \mathbf{j} \cdot \nabla p = 0$$

$$= -2 \frac{\nabla B \times \mathbf{B}}{B^3} + \frac{\mu_0 \mathbf{j}}{B^2} = -2 \frac{\nabla B \times \mathbf{b}}{B^2} + \frac{\mu_0 \mathbf{j}}{B^2}$$

$$\Rightarrow \nabla p \cdot \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{B^2} \right) = -2 \nabla p \cdot \left(\frac{\nabla B \times \mathbf{b}}{B^2} \right) - \frac{2\mu_0}{B^2} \nabla p \cdot \mathbf{j} \quad \rightarrow 0$$

磁力線に沿った電流の効果



B_p (ポロイダル磁場) の付加による $E \times B$ ドリフトの抑制 (分離電荷の抑制)



平衡電流電流の生成



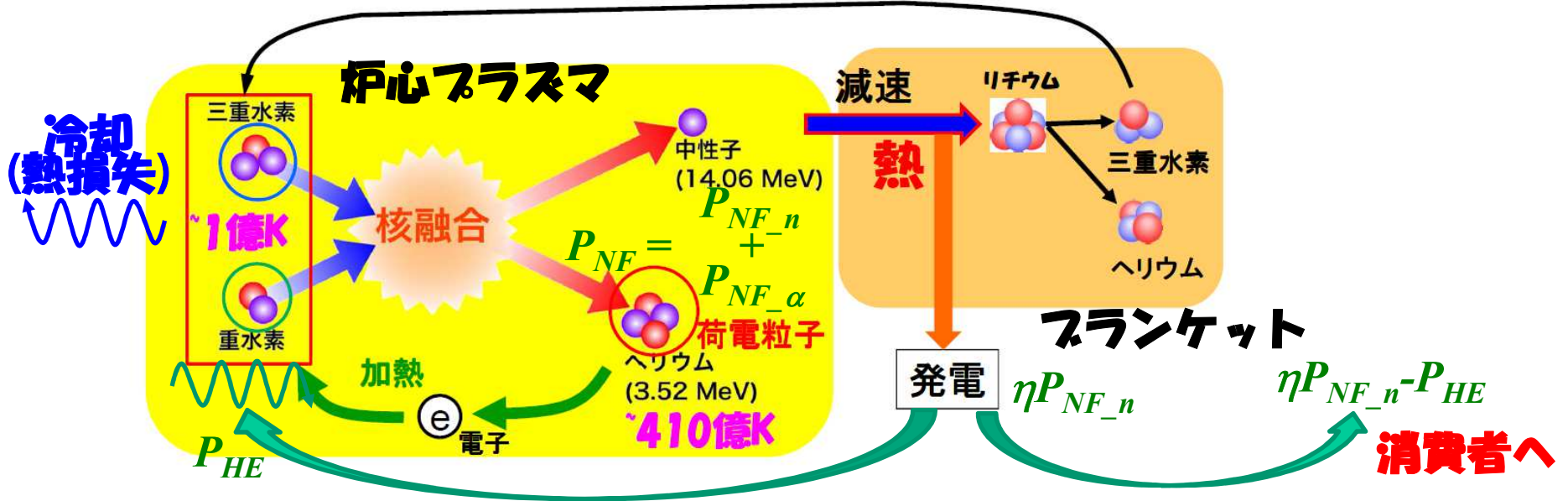
磁気面をトーラス外側へシフトさせる効果

磁力線のねじれ具合 (回転変換) が小さい (i ; 小) ほど、平衡電流大
 プラズマの量が多いほど (圧力が高い)、平衡電流大

\Rightarrow 磁気面のトーラス外側へ移動量大

\Rightarrow 圧力の高いプラズマは閉じ込め難い

核融合炉成立の条件



プラズマ状燃料の内部エネルギー $W_p = \frac{3}{2}(n_e T_e + n_i T_i) V_p \sim 3n_i T V_p$ **の時間変化**

$$\frac{dW_p}{dt} = P_{HE} + P_{NF_α} - P_{loss} \equiv P_{HE} + P_{NF_α} - \frac{W_p}{\tau_E} \Rightarrow 0 \text{ (定常)}$$

エネルギー増倍率 $Q \equiv P_{NF} / P_{HE}$

$$P_{NF} = 5 \times P_{NF_α} = n_D n_T \langle \sigma v \rangle E_{NF} V_p = C n_i^2 T_i^2 E_{NF} V_p$$

$$\langle \sigma v \rangle = 1.1 \times 10^{-24} T^2 \quad (m^3/s)$$

$$\left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{5} \right) P_{NF} = \frac{W_p}{\tau_E}$$

$$C E \left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{5} \right) n_i^2 T_i^2 V_p = \frac{3 n_i T_i V_p}{\tau_E}$$

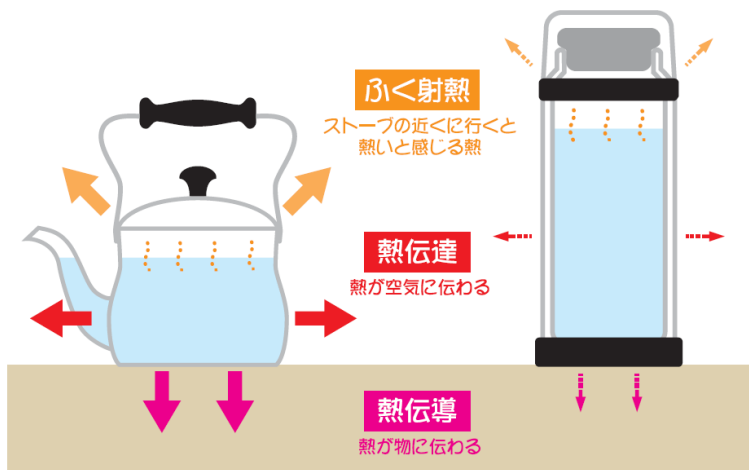
$$n_i T_i \tau_E = C' \frac{5Q}{5+Q}$$

$$C' = 3/CE$$

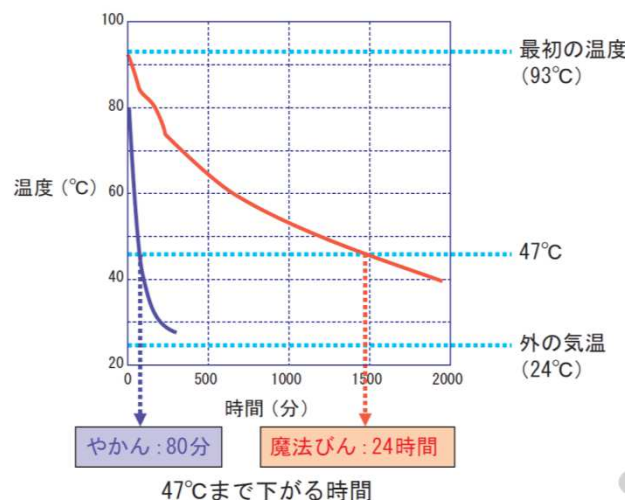
$$C = 1.1 \times 10^{-24}, E = 17.6 \text{ MeV}$$

τ_E 閉じ込め時間

τ_E 閉じ込め時間とは?? ; プラズマの冷え難さの目安



右図で、魔法びんのお湯の方が冷え難い
=> 熱いお湯を維持するのに必要なエネルギーが少なくて済む



核融合反応には、高い温度が必要

「長い閉じ込め時間」

=>

少ないエネルギーで大きな核融合反応エネルギーを取り出せる

核融合炉成立の条件 (II)

$$P_{HE} + P_{NF-\alpha} = \frac{W_p}{\tau_E}$$

• 臨界プラズマ条件 $P_{HE} = P_{NF} [Q=1]$

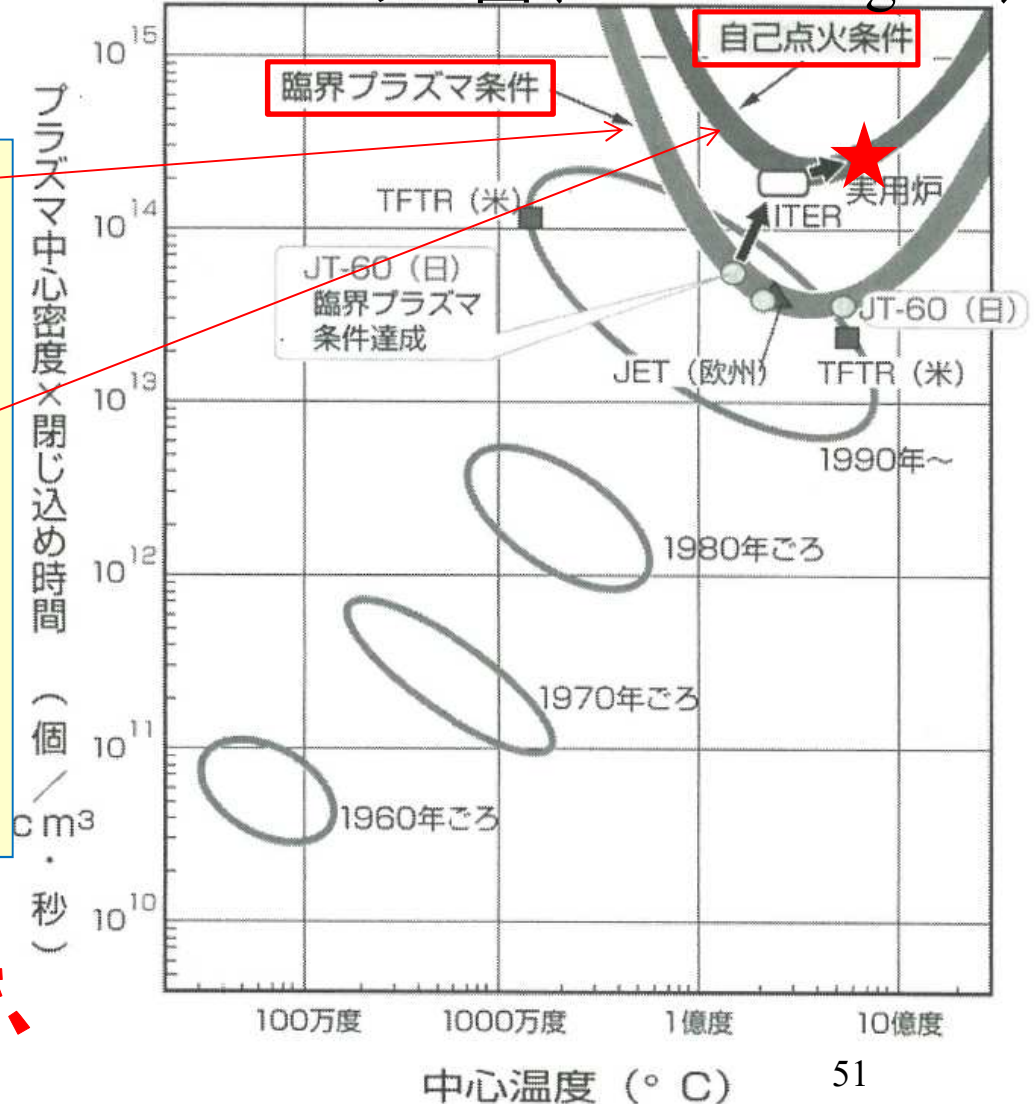
$$nT\tau_E = \frac{5}{2CE} \quad C = 1.1 \times 10^{-24}, \quad E = 17.6 \text{ MeV}$$

• 自己点火条件 $P_{HE} = 0 [Q = \infty]$

$$nT\tau_E = \frac{15}{CE}$$

トカマク型実用炉では $30 < Q < 50$ が想定されている。

ローソン図 (Lawson diagram)



**nT の上限は、「MHD」で、
 τ_E は、「輸送」で制限。**

高温高密度プラズマの安定的な維持(閉じ込め)における「MHD」 / 「輸送」の役割とは？

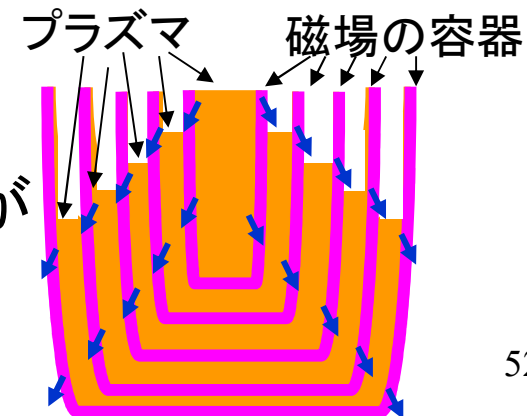
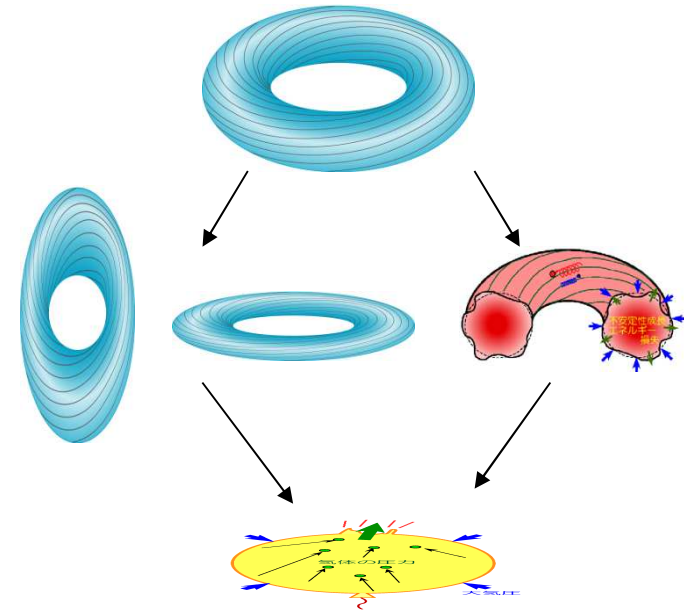
磁場核融合炉心では、
磁場の容器中に高温高密度(高圧)
のプラズマを安定的に閉じ込めたい。
それを妨げる2種類の現象。

プラズマ自身が磁場、電場を作る。
=> プラズマが磁場の容器を变形・破
壊し、「**あっという間**」にプラズマが
容器から飛び出す。

=> **「MHD(電磁流体力学的)不安定」**

磁場の容器には、「すきま」がある。
=> 「すきま」から「**じわっ**」とプラズマが
漏れ出る。

=> **「輸送」** 比喩であることに注意



プラズマ閉じ込めにおける「MHD」、「輸送」の役割

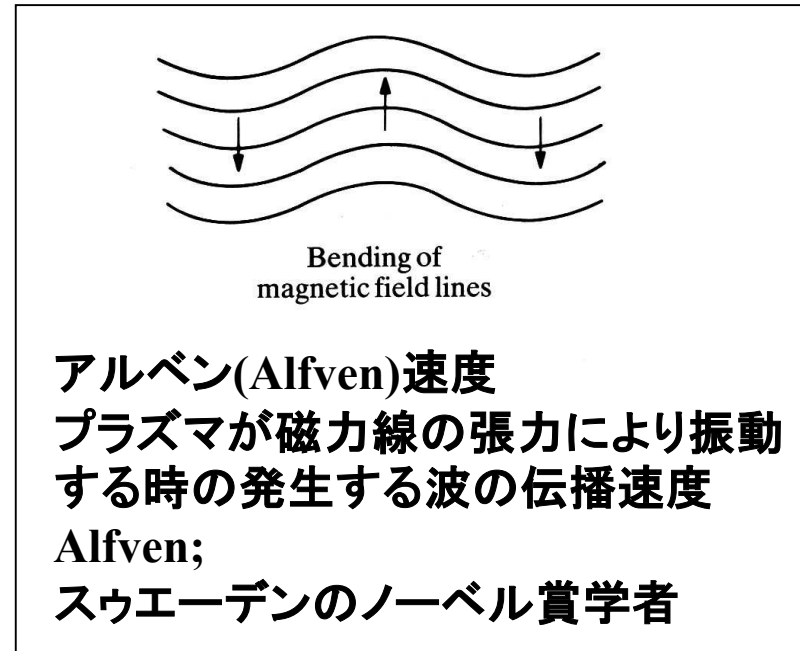
(続き)

現象が起こる時間スケールが違う!!

「MHD平衡」の特性時間
アルヴェン時間
= 装置サイズ/アルヴェン速度
1m, 1T, $1 \times 10^{20} \text{m}^{-3}$ で、 1×10^{-6} 秒

「MHD安定性」の特性時間
アルヴェン時間 \times (10~1000)

「輸送」の特性時間
「閉じ込め時間」
= 装置サイズ²/熱伝導度
核融合炉で、1秒以上。
大型実験装置で、0.1~1秒。



$$\text{アルフベン速度} = \sqrt{\frac{\text{磁気圧}}{\text{質量}}} = \sqrt{\frac{B^2/\mu_0}{\rho}}$$

流体方程式=> 輸送方程式

非等方で粒子源、加熱源がある時、流体方程式は、以下のようになる。

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla \cdot (n_j \mathbf{V}_j) = S_j \quad \text{連続の式}$$

$$m_j n_j \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}_j \cdot \nabla) \right] \mathbf{V}_j = q_j n_j (\mathbf{E} + \mathbf{V}_j \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \vec{\mathbf{P}}_j + \mathbf{R}_j \quad \text{運動方程式}$$

$$\frac{\partial p_j}{\partial t} + \nabla \cdot (p_j \mathbf{V}_j) + \frac{2}{3} p_j \nabla \cdot \mathbf{V}_j + \vec{\mathbf{\Pi}}_j : \nabla \mathbf{V}_j + \nabla \cdot \mathbf{q}_j = Q_j \quad \text{エネルギー保存則}$$

$\vec{\mathbf{\Pi}} \equiv \vec{\mathbf{P}} - p\vec{\mathbf{I}}$
 \mathbf{q} は熱流束。

非等方の場合、運動方程式とエネルギー保存則が電磁流体力学方程式と大きく異なることに注意。

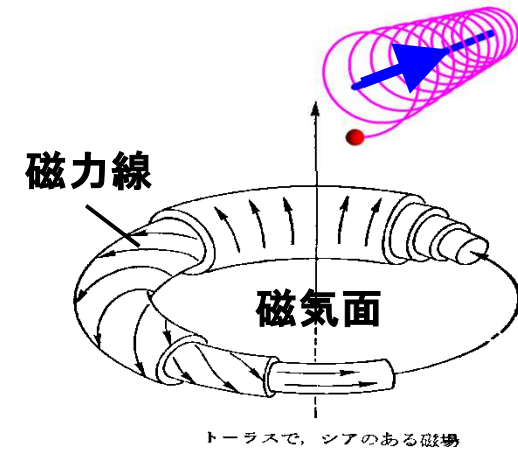
核融合炉心プラズマからの粒子、熱の輸送機構として、拡散、伝導、移送、輻射を挙げることができる。ここでは、粒子の輸送を考えてみる。

粒子の輸送機構

粒子の輸送機構は以下の連続の式で記述できる。

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla \cdot (n_j \mathbf{V}_j) = S_j$$

上式の $n\mathbf{V}$ はある体積要素の面を横切って単位時間あたりに輸送される粒子数で、「**流れによる粒子の粒子束**」、「**拡散による粒子束**」がある。



流れによる粒子の輸送:

流れが存在すると、粒子は流れに沿って輸送される。

$$\text{粒子束} = \text{密度} \times \text{流体の速度} \quad [\Gamma = n\mathbf{V}]$$

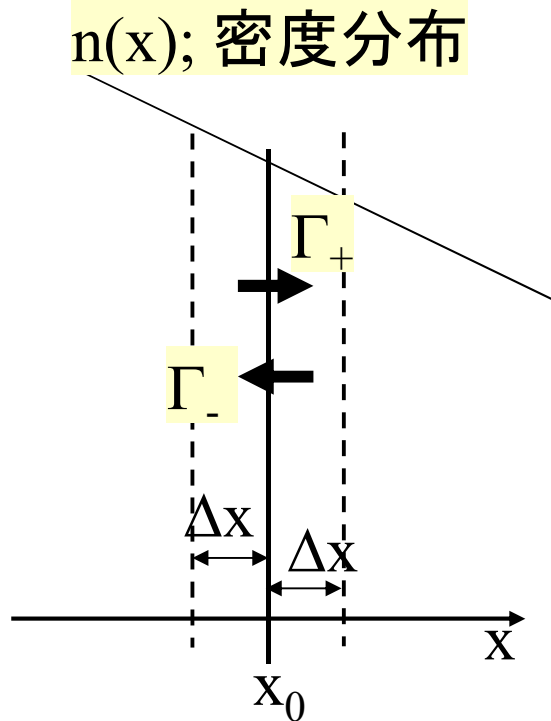
粒子束: ある面を横切って単位時間当たり輸送される粒子数

拡散:

流れが存在しなくても密度勾配があれば、**衝突により密度高から低へ粒子が輸送される。**

$$2017/5/23 \quad \text{粒子束} = \text{拡散係数} \times (-\text{勾配}) \quad [\Gamma = D \times (-dn/dr)]$$

拡散による粒子輸送



拡散が起こる時の現象の**典型的な衝突時間を Δt** , 1回の衝突により、粒子が移動する**典型的なステップサイズを、 Δx** とする (1次元方向の運動のみを行うと仮定)。

面 x_0 を典型的な衝突時間内に左から右に移動する粒子数は、 x_0 の面積を S として

$$N_+ = \frac{S}{2} \times \int_{x_0 - \Delta x}^{x_0} n(x) dx$$

したがって、粒子束 Γ_+ は

$$\Gamma_+ \equiv \frac{N_+}{S \cdot \Delta t} = \frac{1}{2\Delta t} \int_{x_0 - \Delta x}^{x_0} n(x) dx$$

同様に、面 x_0 を右から左への粒子束は

$$\Gamma_- = \frac{1}{2\Delta t} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} n(x) dx$$

$$\therefore \Gamma = \Gamma_+ - \Gamma_- = -\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \frac{dn(x)}{dx}, \quad \text{拡散係数} = -\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}$$

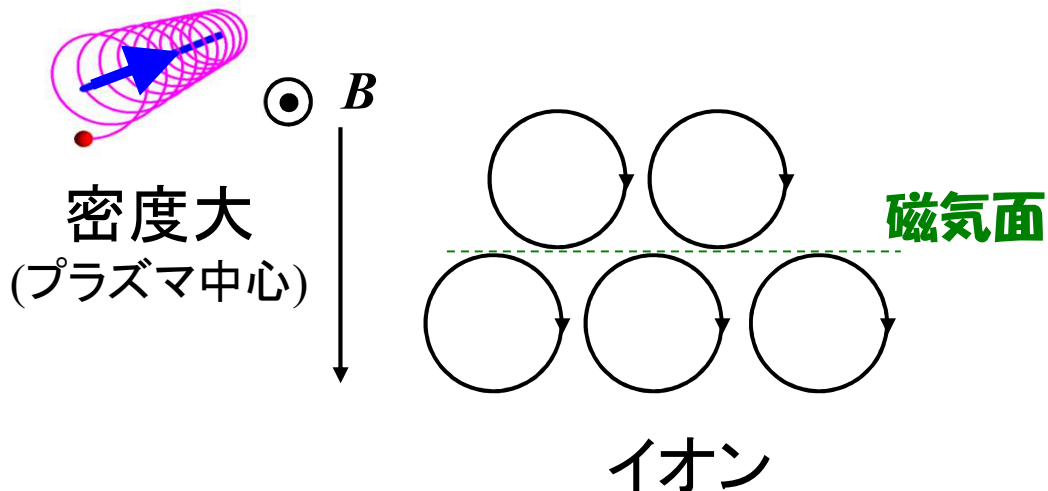
Advance

2017/5/23

粒子束は拡散係数 \times 勾配。拡散係数はステップサイズの2乗 \div 時間

$$n(x_0 + \Delta x) = n(x_0) + \Delta x \frac{dn}{dx} \text{に注意}$$

(磁場中を運動する荷電粒子の)拡散



$$r_{Bi(e)} = (m_{i(e)} T_{i(e)} / q_{i(e)}^2 B^2)^{0.5}$$

$$v_{i(e)} \sim 2 n_{i(e)} q_{i(e)}^3 q_i / \epsilon_0^2 m_{i(e)}^{0.5} T_{i(e)}^{1.5}$$

(i; イオン, e; 電子, $\ln \Lambda \sim 20$)

1keV, 5T, $10^{20} m^{-3}$ で

$$r_{Bi} \sim 0.6 mm, r_{Be} \sim 0.015 mm$$

$$v_{ii} \sim 5 \times 10^4 (s^{-1})$$

一様磁場中のプラズマは、「ラーマ(回転)運動」をしながらクーロン衝突によりその位置を移動 => 密度の勾配(偏り)があると密度の低いほうへ移動 => **古典拡散**

特徴的な衝突は、
イオンの場合、イオン同士の衝突
 特徴的な衝突による移動距離は、
ラーマ半径(イオン) $\sim m_i^{0.5} n_i q_i^2 / T_i^{0.5} B^2$
 => **古典拡散の拡散係数D;** $r_{Bi}^2 v_{ii}$ (イオン)

Dは、
 Bの-2乗に比例

aが大きいほど、
 Dが小さいほど、
 高温になる

温度、磁場が高いほど、密度が低いほど、**閉じ込め性能は良**

熱の輸送も同じ性質をもつとすると、熱流束;
 $q_i = -D_i n_i dT_i / dr$ $\nabla \cdot q_j = Q_j$

小半径aのドーナツで熱を閉じ込めると、同じ加熱パワー $Q_i = \text{const}$ で、端で $T_i = 0$ とすると中心の温度は、 **$T_0 = a^2 Q_i / D_i / n_i / 2$**