(熱･)電磁流体物理特論@ES025, Thus.10:30~

講師; 渡邊 清政(核融合科学研究所)
(併任) エネ理専攻･核融合プラズマ研究G

講義の概要

今年度は、電磁流体力学に焦点を当てた講義を行う。

プラズマを流体として扱うのに必要な基礎知識として、速度分布関数(1)を説明し、その速度分布関数のモーメントが従う式として、流体方程式(2)の導出を講義する。さらに、準中性な荷電粒子群(プラズマ)を記述する方程式群のひとつとして、電磁流体力学的方程式(MHD方程式)(3)を導出し、その方程式が記述できるプラズマの条件について議論する。さらに、MHD方程式に従うプラズマの平衡特性、安定特性が背景磁場(4)の特性によりどのように変わるかについて議論する。また、MHD平衡特性、安定特性を粒子的描像と流体的描像の2面(5)から議論することにより、平衡特性、安定特性が決定されるメカニズムについて直観的な描像を把握する。

(イントロ)=>(5)=>(1)=>(2)=>(3)=>(4)

特に、対象とするプラズマは、核融合炉心プラズマ(1T程度の磁場中の0.01~10keV, ~$1\times10^{20}\,\mathrm{m}^{-3}$程度の温度、密度)。

0. 核融合発電炉の開発研究と電磁流体力学

現在、開発が進んでいる核融合発電炉の発熱部(炉心)は、「熱核融合」方式で、燃料(重水素[D]と三重水素[T])をプラズマ状態にして、核融合反応を持続的に起こすことを計画している。

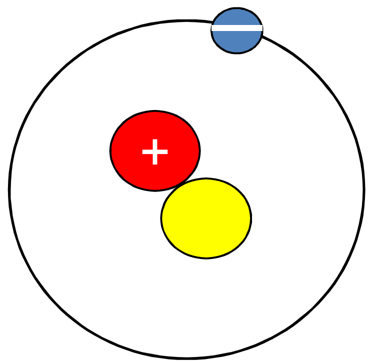
炉心プラズマの特性を研究する有力な手法の一つに、「電磁流体力学」がある。

「電磁流体力学」は、このほかにも、以下の様な分野の研究に使われている。

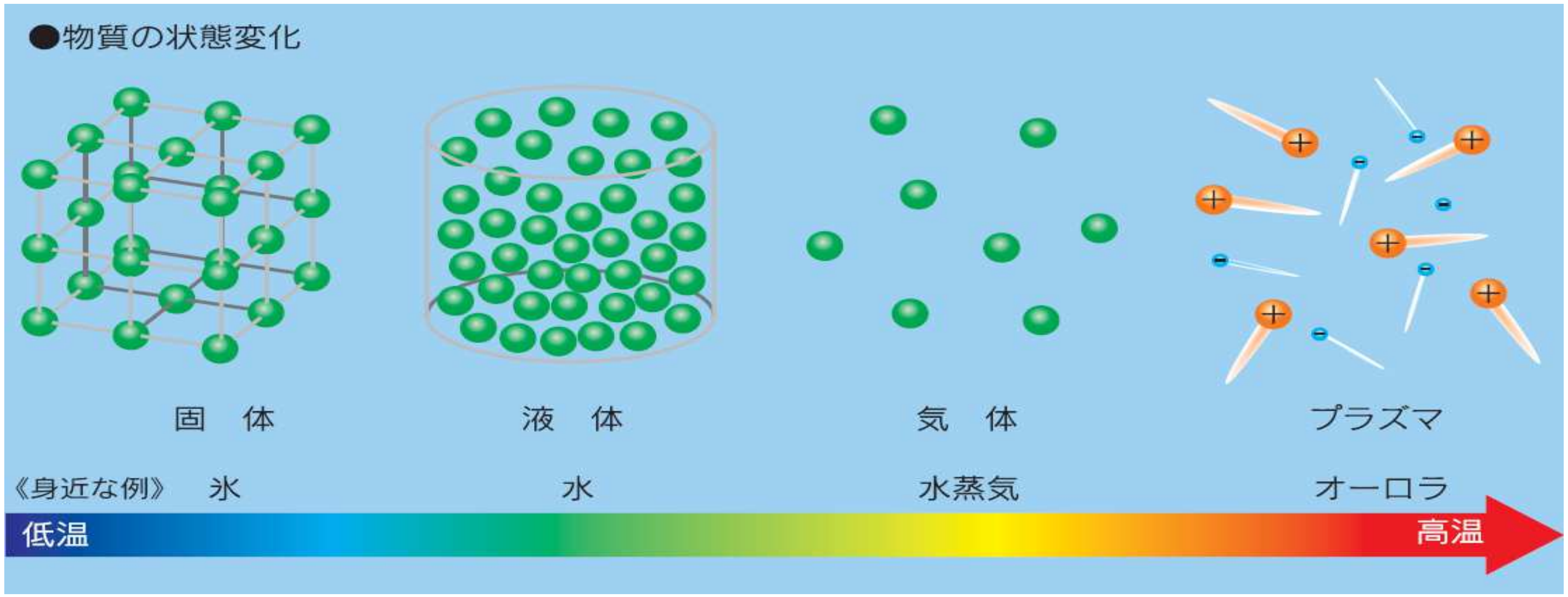
磁気圏、宇宙空間でのプラズマの振る舞い。
MHD推進、MHD発電。
磁場中の金属流体や溶融塩のMHD損失等。

プラズマとは?

常温の水素は、気体(分子/原子) =>
原子(原子核の周りを電子が回っている)
(原子の大きさは原子核の10万分倍)



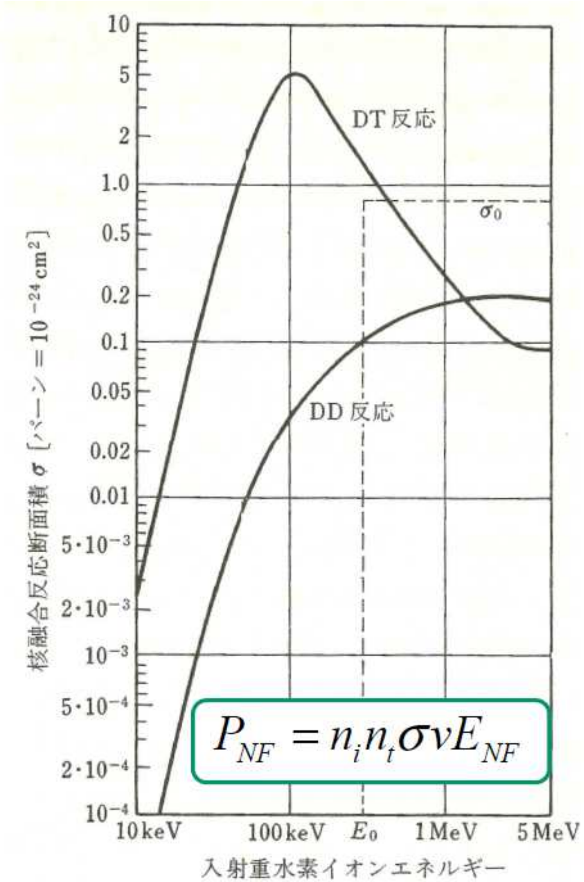
温度を上げていくと、原子核から電子が剥ぎ取られる => "プラズマ"状態



プラズマと核融合の関係

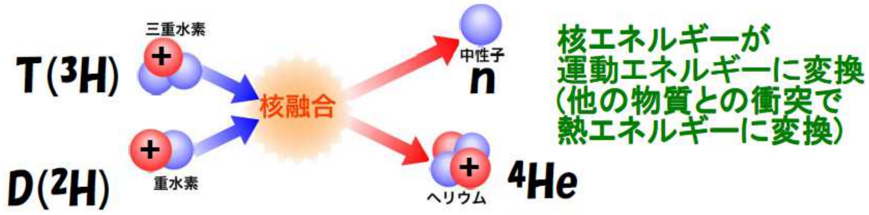
何故、「プラズマ」を使って核融合発電炉を作るのか?

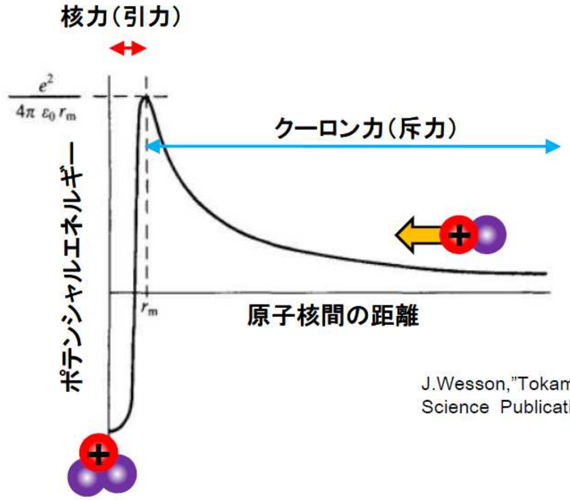
- 「D^+ビーム+T^+ビーム」で核融合発電炉を作ろうとしない理由は?



● **核融合の場合 (D-T反応)** **化学反応の1000万倍**

^{2}H(重水素) + ^{3}H(三重水素) → ^{4}He + n + 2.8x10^{-12}J /2原子



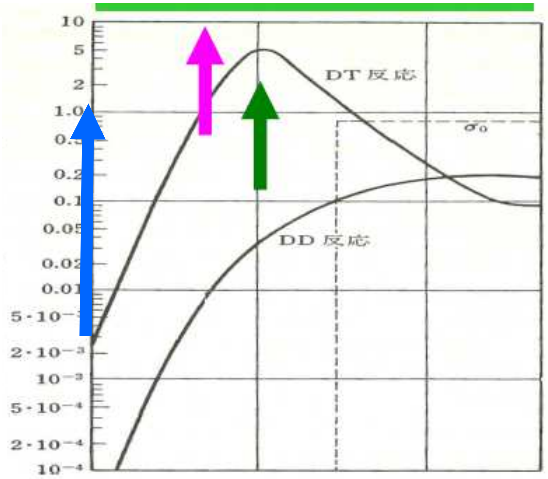


J.Wesson,"Tokamaks" (OXFORD Science Publications)より

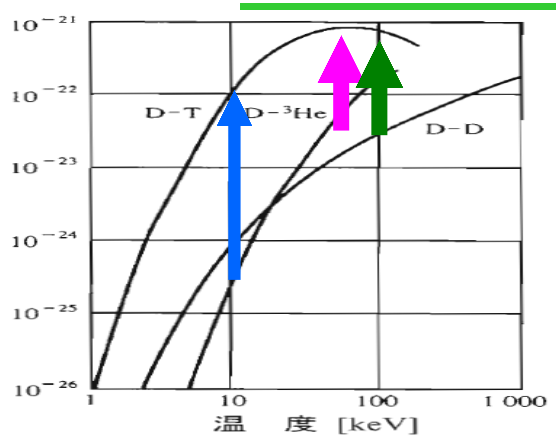
核融合炉には「熱化」プラズマの利用がベスト

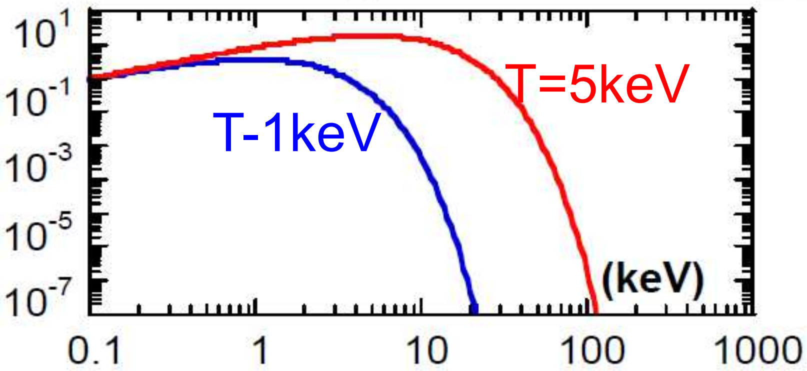
粒子のエネルギー

核融合の反応確率



核融合の反応確率





マックスウェル分布の時の粒子数のエネルギー分布

$$n \sim \varepsilon \exp\left(\frac{-\varepsilon}{T}\right)$$

粒子数の最大はε~Tだが、ε~20Tでも、最大に対して10^{-7}程度の粒子は存在する

熱化された粒子の速度分布
マクスウェル分布、温度ととして定義

熱化プラズマを使うと、平均エネルギーの低いプラズマでの核融合反応率が劇的に増加

温度を上げるには、単にエネルギーを加えれば０Ｋ。一方向の加速等は不要
+
核融合に至らない衝突で、温度は下がらない（反応率は同じ）
=>
エネルギー利用の効率化

温度の定義は?

- 熱平衡状態の粒子群の平均運動エネルギー。
- 熱平衡状態(衝突が十分大きく、十分時間がたった状態)粒子群の速度分布は等方で、ガウス分布（マックスウェル分布）となる。

温度の単位は?

J; ジュール
K; ケルビン(水の3重点[気相・液相・固相が共存する熱平衡状態の温度]から定義。$1K=1.38x10^{-29}J$)
eV; 電子ボルト(素電荷をもつ荷電粒子が、1 V の電位差を抵抗なしに通過する時に受け取るエネルギー。
1eV~11,604K)

流体力学とは?

- 多数の粒子の振舞いを粒子の集団(粒子群;流体)として捉える学問分野で、その力学的性質を調べる学問

流体として、考える時のキーワードは???

- 粒子群(流体)の性質を個々の粒子毎に調べるのではなく、「密度」,「温度」,「圧力」,「流速」, (「電荷密度」とか「電流」)というある重みを持った平均量(統計量)で表し, その振舞いを調べる.

MHDとは???

Magneto**h**ydro**d**ynamics/電磁流体力学　の略称

流体力学の中で荷電粒子(プラズマ)を対象とし、電子とイオンを一つの流体(電磁流体)として取り扱う手法

プラズマの密度、温度、圧力、流速の関係 (I)

熱平衡状態(衝突が十分大きく、十分時間がたった状態);
粒子群の速度分布は等方で、速度の絶対値に関してガウス分布(マックスウェル分布)となる。
その分布の分散をT/m、平均を**u**と定義すると、

$$f \propto \exp\left(\frac{m(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2/2}{T}\right);$$ ボルツマン係数は略

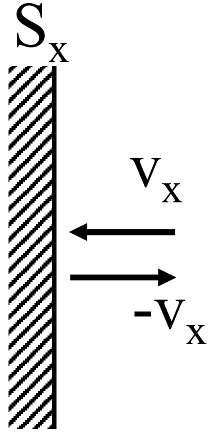
$N \equiv \int f d\mathbf{v}$;全粒子数を$N$とすると=> $f = \mathrm{N}\left(\frac{\mathrm{m}}{2\pi\mathrm{T}}\right)^{1.5} \exp\left(\frac{m(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2/2}{T}\right)$

$$\int \frac{m(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2}{2} f d\mathbf{v} => \frac{3}{2}\mathrm{NT}$$

平均速度で動いている系で見た時の粒子群のエネルギー(熱ネルギー)

プラズマの密度、温度、圧力、流速の関係 (II)

簡単のため、流速を0として、圧力を考えてみる。



1個の粒子が壁に与える運動量は

$$2mv_x$$

面積S_xの壁に単位時間当たりに当たる粒子の個数は密度をnとして

$$v_x S_x n$$

したがって、単位時間当たりに面積S_xの壁が受ける運動量(力)は、

$$2mv_x^2 S_x n$$

等方を仮定し、面積で割ったものが圧力pなので、

$$p=2mn\langle v^2\rangle/3=nT$$

圧力は密度と温度の積で表される。

個々の粒子が従う式は?
- 変数は, それは何の関数??

$$m_j \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_j}{\mathrm{d}t} = q_j\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}_j \times \mathbf{B}\right) + \sum_i \mathbf{p}_i \delta(t - t_i),$$

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j\left(\mathbf{x}_j, t\right), \mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x})$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_j}{\mathrm{dt}} = \mathbf{v}_j$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \sum_j q_j \mathbf{v}_j \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t)\right),$$

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = \sum_j q_j \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t)\right).$$

粒子の集団(粒子群;流体)の従う式は?
- 変数は, それは何の関数??

$\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$;　質量密度

$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$;　流速

$p = p(\mathbf{x}, t)$;　圧力

$\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$;　電流

$\mathbf{x}$; ????

MHD方程式

電子･イオンの2つの流体方程式(粒子源･熱源無)を1流体化。
イオンと電子の流速はほぼ同じと仮定し、電子とイオンは一体として運動。
(電子の慣性/加減速応答はゼロと仮定。イオン･電子の流速差は電流として考慮)

流速は$\boldsymbol{u}\sim\boldsymbol{u}_{//}+\boldsymbol{E}\mathrm{x}\boldsymbol{B}/\mathrm{B}^2$, 磁力線方向の電場は無し。$\boldsymbol{E}\mathrm{x}\boldsymbol{B}/\mathrm{B}^2$は熱速度程度の大きな流速を仮定し、熱速度程度の速い速度で磁力線を横切る急激な不安定性を扱う。

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}=\mathbf{j}\times\mathbf{B}-\nabla p,$$ 運動方程式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{u})=0,$$ 質量保存則

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)=0,$$ エネルギー保存則

$$\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}=\eta\mathbf{j},$$ 一般化したオームの法則

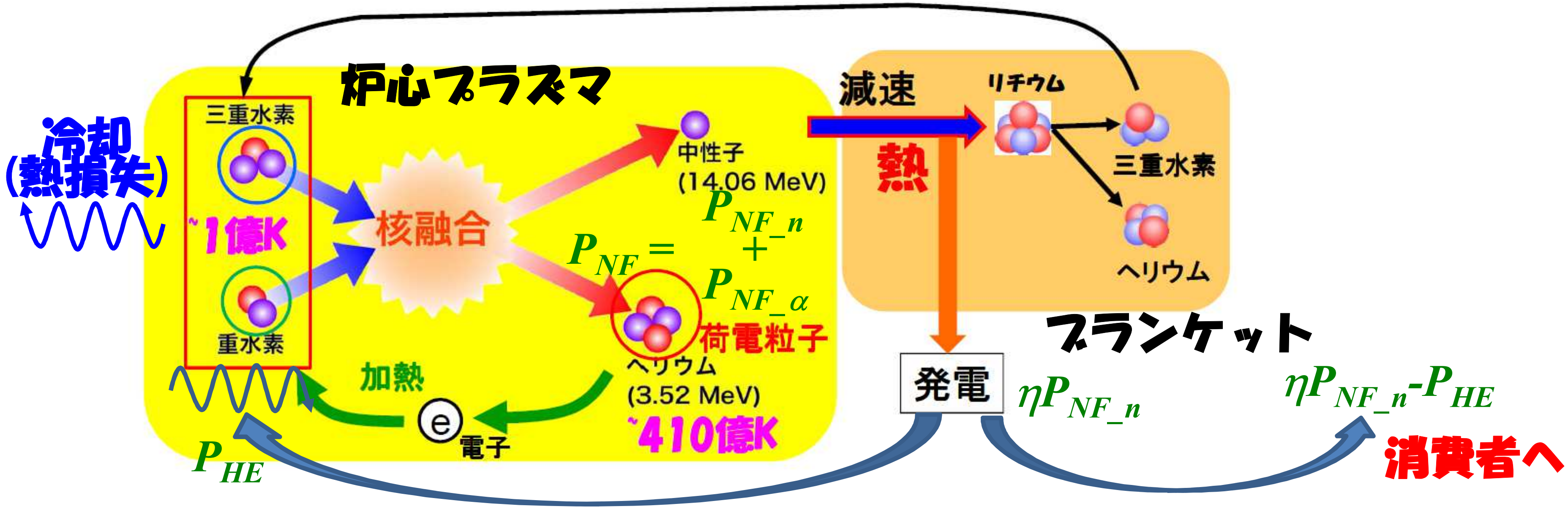
初期条件

$$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{j},\quad \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\mathbf{B}=0.$$ マックスウェル方程式

$\rho, \mathbf{u}, p, \mathbf{j}, \mathbf{E}, \mathbf{B}$　変数が14個、式が14個(+1個;初期条件)

抵抗ηをゼロと仮定したものが、理想MHD方程式。

核融合炉成立の条件 [反応熱-損失熱>0]



プラズマ状燃料の内部エネルギー $W_p = \frac{3}{2}(n_e T_e + n_i T_i)V_p \sim 3n_i T V_p$ **の時間変化**

$$\boxed{\frac{dW_p}{dt} = P_{HE} + P_{NF\_\alpha} - P_{loss} \equiv P_{HE} + P_{NF\_\alpha} - \frac{W_p}{\tau_E}}$$

=> 0 (定常)

- **臨界プラズマ条件** $P_{HE} = P_{NF}$ [エネルギー増倍率 $Q \equiv P_{NF} / P_{HE} = 1$]
- **自己点火条件** $P_{HE} = 0$ [$Q = \infty$]

核融合反応によって生成される荷電粒子(D-T炉の場合はアルファ粒子)がプラズマの中にとどまり、そのエネルギーによってプラズマが加熱され、核融合反応が維持される。

核融合炉成立の条件

$$n\tau_E = \frac{12T}{(5/Q+1)\langle\sigma v\rangle E_\alpha}$$

$$\langle\sigma v\rangle = 1.1\times10^{-24}T^2 \quad (m^3/s)$$

•臨界プラズマ条件　$P_{HE} = P_{NF}$　[Q=1]

$$nT\tau_E = \frac{2C}{E_\alpha} \qquad C \equiv \left(1.1\times10^{-24}\right)^{-1}$$

•自己点火条件　$P_{HE} = 0$　[$Q = \infty$]

$$nT\tau_E = \frac{12C}{E_\alpha}$$

トカマク型実用炉では $30 < Q < 50$ が想定されている。

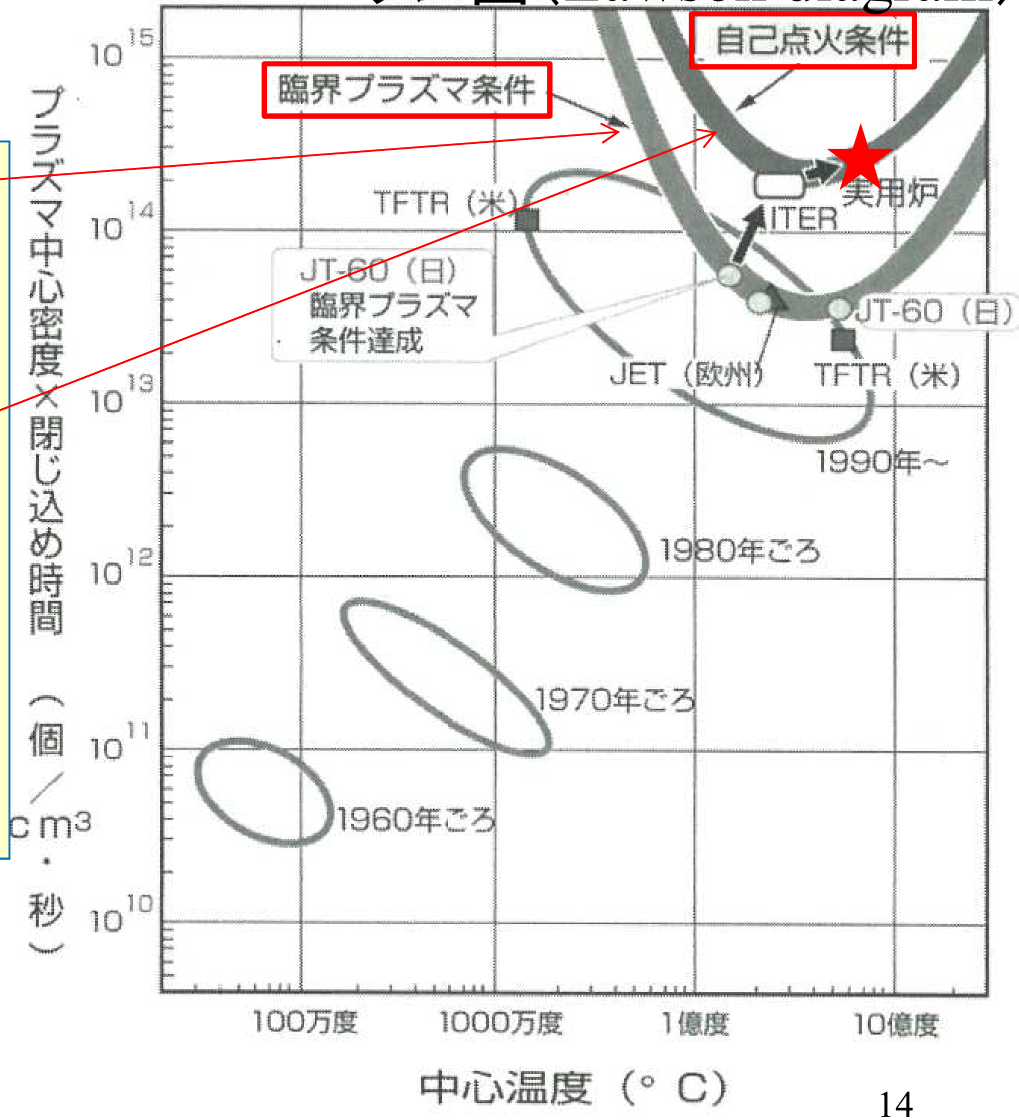
高温・高密度

(最低1億度、100兆個/cc)

=> 3.8x10^{4}cal/cc

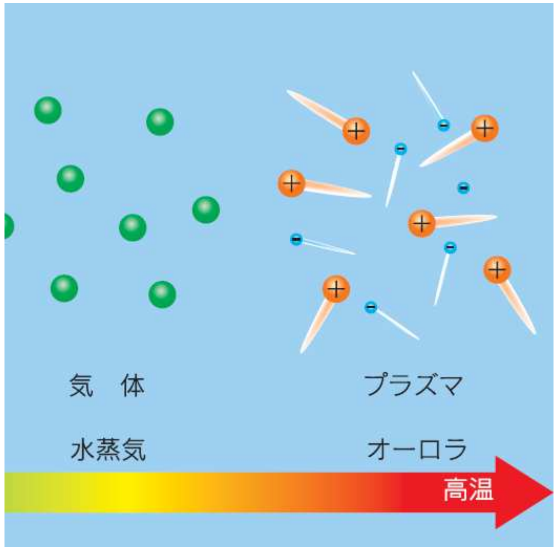
（鉄3.8kgを0°=>1000°にあげる熱量）

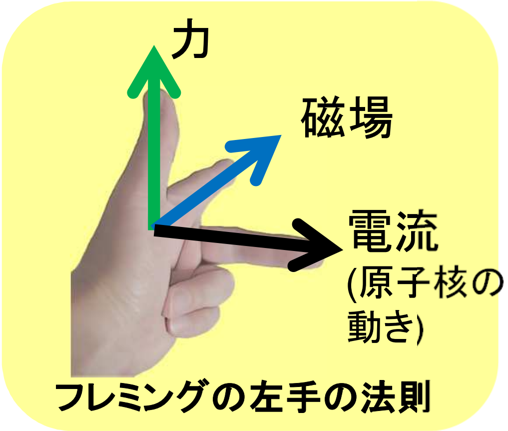
ローソン図（Lawson diagram）



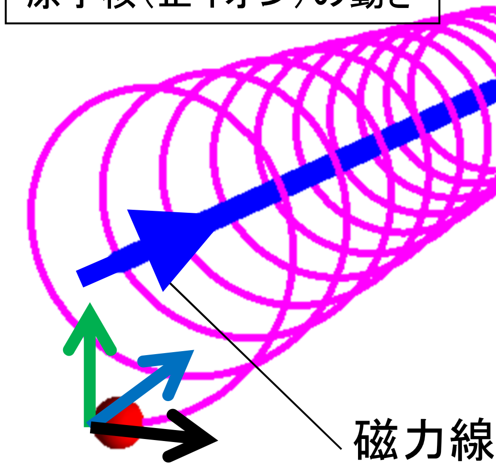
プラズマ・核融合学会誌 vol.87「特集/テキスト　核融合炉」より

どのようにしてプラズマを閉じ込めるか？



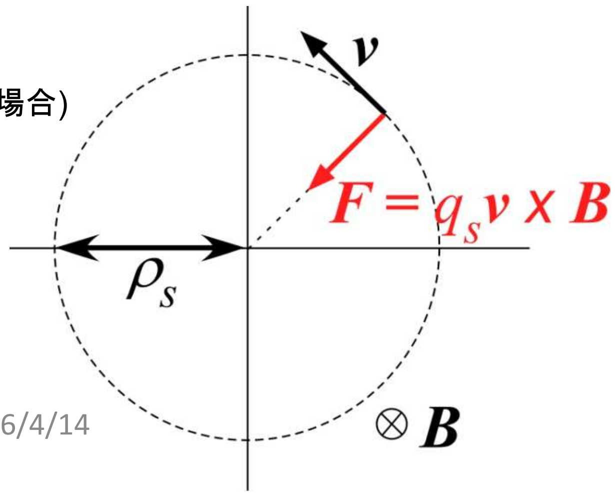


原子核（正イオン）の動き



$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)$$

(E=0の場合)



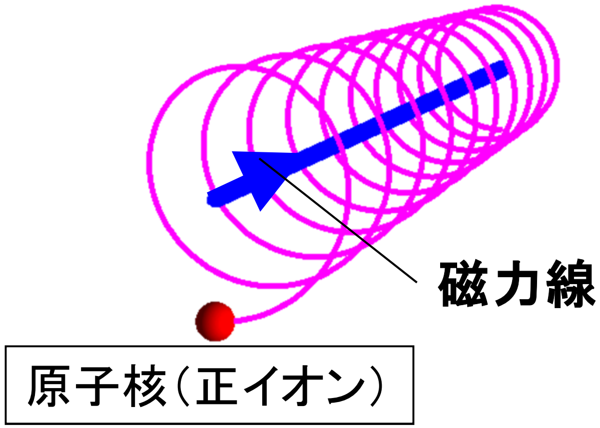
サイクロトロン周波数

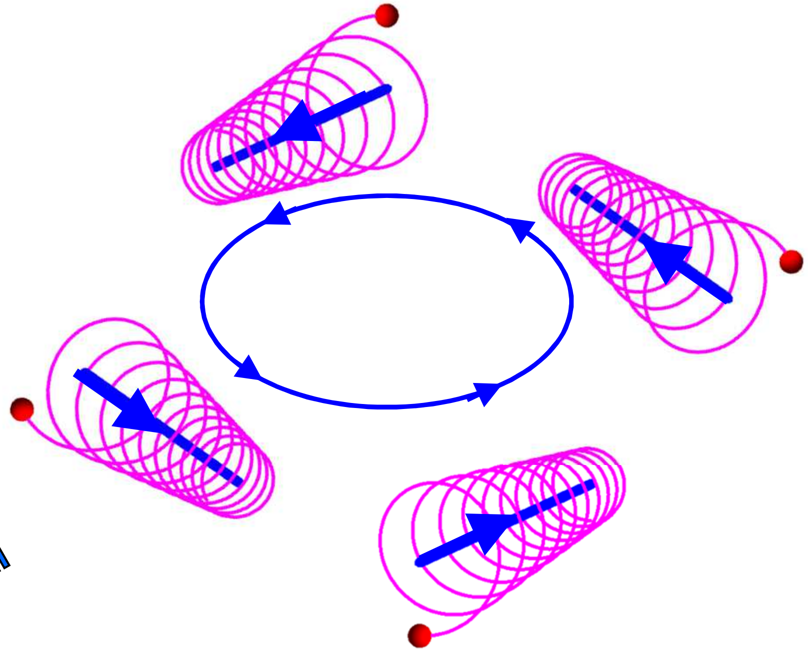
$$f_{c,s} = \frac{\omega_{c,s}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{q_s B}{m_s} = \begin{cases} electron: 28.0\,B\,(GHz) \\ ion: \quad 15.2\,\dfrac{Z}{A}B\,(MHz) \end{cases}$$

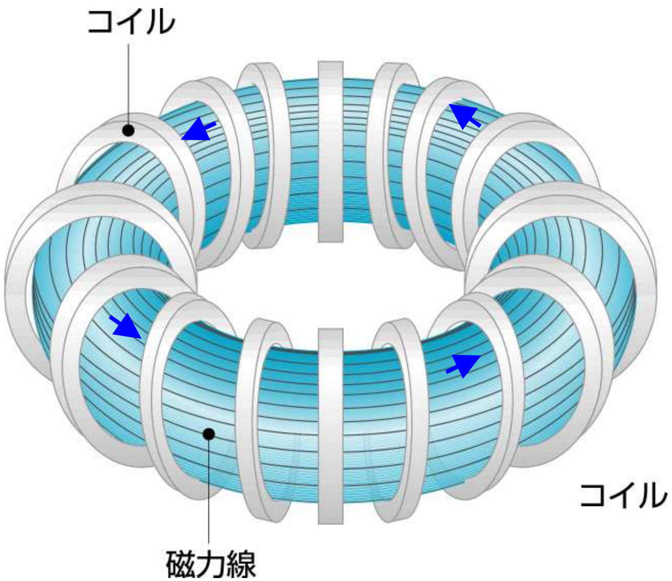
Larmor半径

$$\rho_s = \frac{v}{\omega_{c,s}} = \frac{m_s v}{q_s B}$$

磁場によるプラズマの閉じ込め





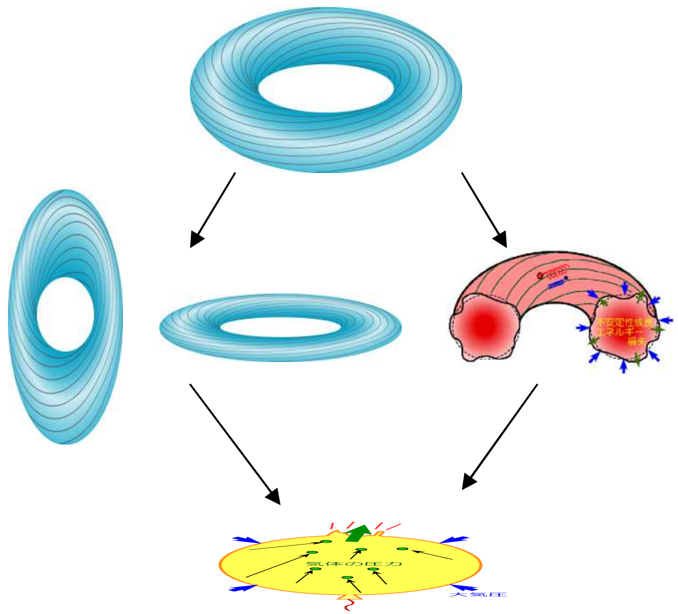


端が無いように、繋げて環状（トーラス）にしてやればよい！

トーラス磁場

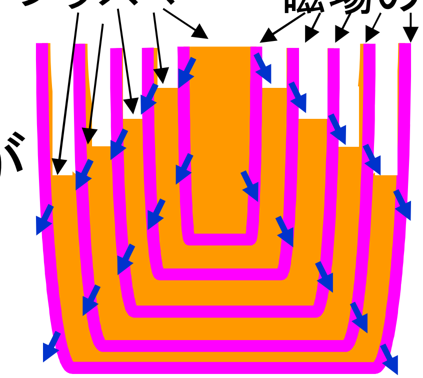
高温高密度プラズマの安定的な維持(閉じ込め)における「MHD」/「輸送」の役割とは?

磁場核融合炉心では,
磁場の容器中に高温高密度(高圧)
のプラズマを安定的に閉じ込めたい。
それを妨げる2種類の現象。



プラズマ自身が磁場、電場を作る。
=> プラズマが磁場の容器を変形・破壊し、**「あっという間」**にプラズマが容器から飛び出す。
=> **「MHD(電磁流体力学的)不安定」**

磁場の容器には、「すきま」がある。
=> 「すきま」から**「じわっ」**とプラズマが漏れ出る。
=> **「輸送」**



比喩であることに注意

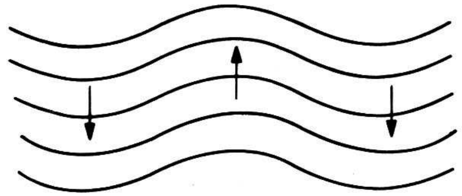
プラズマ閉じ込めにおける「MHD」、「輸送」の役割
(続き)

現象が起こる時間スケールが違う!!

「MHD平衡」の特性時間
アルヴェン時間
= 装置サイズ/アルヴェン速度
1m, 1T, $1 \mathrm{x} 10^{20} \mathrm{m}^{-3}$ で、$1 \mathrm{x} 10^{-6}$秒

「MHD安定性」の特性時間
アルヴェン時間x(10~1000)

「輸送」の特性時間
「閉じ込め時間」
= 装置サイズ^2/熱伝導度
核融合炉で、1秒以上。
大型実験装置で、0.1~1秒。



Bending of
magnetic field lines

アルベン(Alfven)速度
プラズマが磁力線の張力により振動する時の発生する波の伝播速度
Alfven;
スゥエーデンのノーベル賞学者

$$\text{アルフベン速度} = \sqrt{\frac{\text{磁気圧}}{\text{質量}}} = \sqrt{\frac{B^2/\mu_0}{\rho}}$$

講義の目次

0. イントロ
（MHD研究の意義;熱核融合発電炉の開発研究での位置づけ等）

1. MHD平衡特性、安定特性の粒子的描像と流体的描像の概説

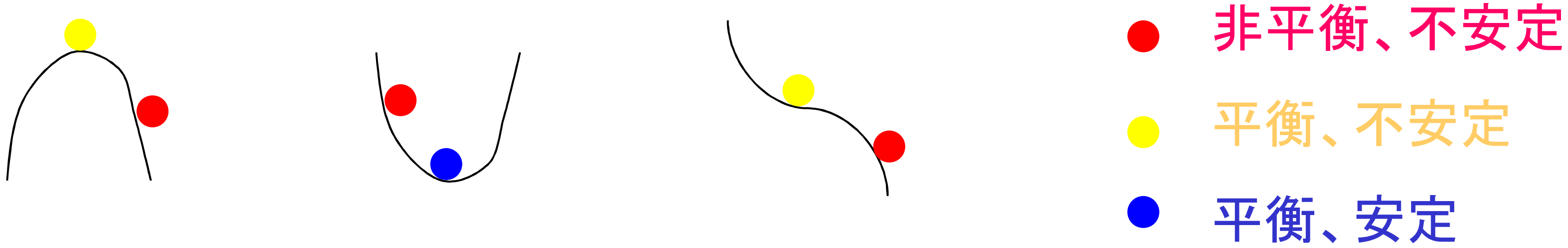
2. 速度分布関数とは

3. 流体方程式と電磁流体方程式(MHD方程式)とは

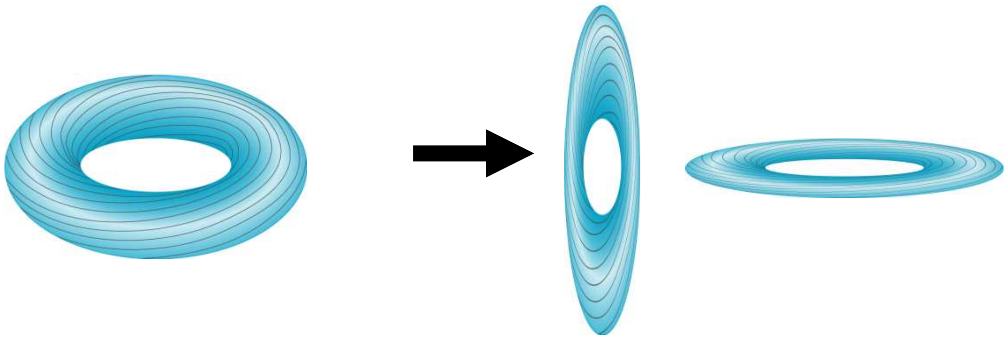
4. MHD方程式に基づくプラズマのMHD平衡特性、安定特性の評価例

5. MHD研究のトピックス等

MHD平衡、安定性研究とは?



MHD平衡研究;
プラズマを**そっと磁場の容器に入れた時**に、プラズマがそこにじっとしてるか?、容器から逃げ出すか(容器が壊れないか)?、じっとしているための条件は何か?



プラズマは荷電粒子の集まりなので、荷電粒子が動くと電流、磁場を発生する(特に、圧力勾配があると電流が誘起される); 複雑化

平衡(力の均衡)が成り立たないと、プラズマが全体的移動して、閉じ込め容器を破壊。

プラズマ(荷電粒子の集団)中の現象の物理機構を理解する手法

粒子的描像

現象を代表する個々の粒子の特徴的な振る舞いに着目して、物理描像を理解。
直観的に理解しやすいが、定量的評価は困難。

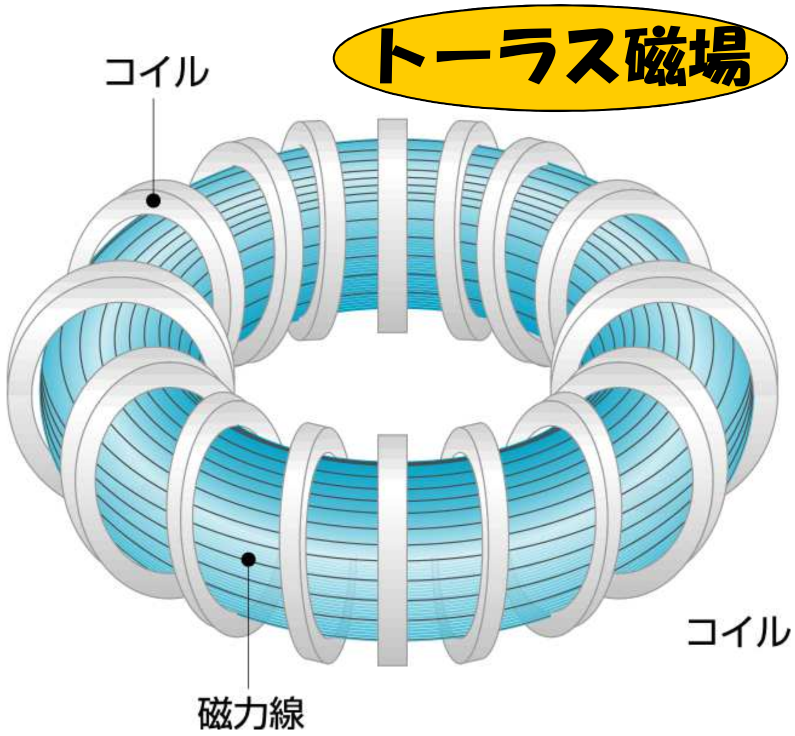
流体的描像

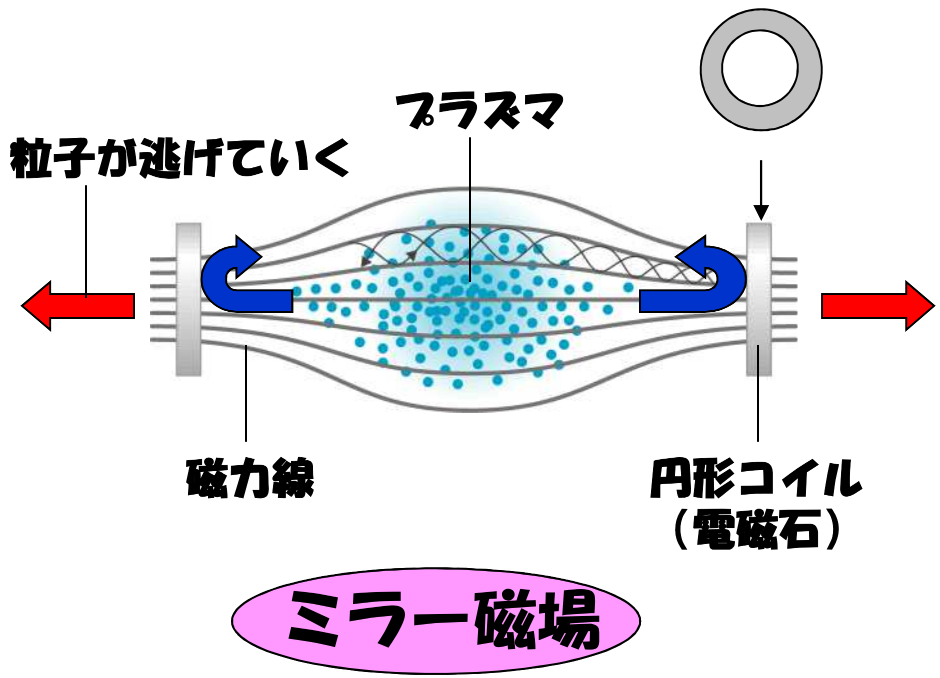
流体の指標(重み付の平均量)の**従う式(法則)に基づき、物理描像を理解**。
抽象的な理解になり易いが、定量的評価には必須。

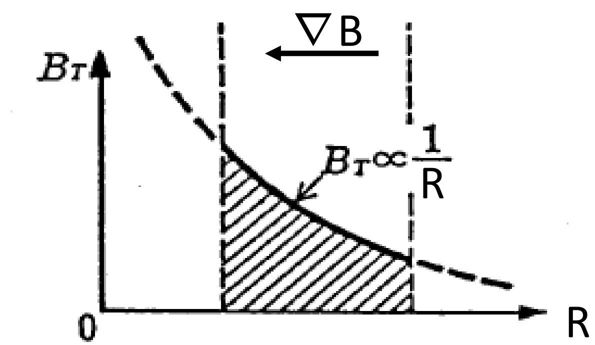
運動(速度)がどうなるかを調べる

エネルギーがどうなるかを調べる

環状閉じ込め磁場の特徴

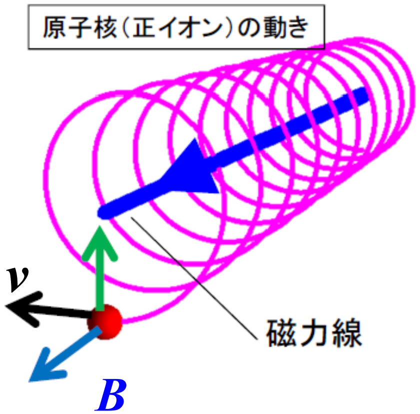




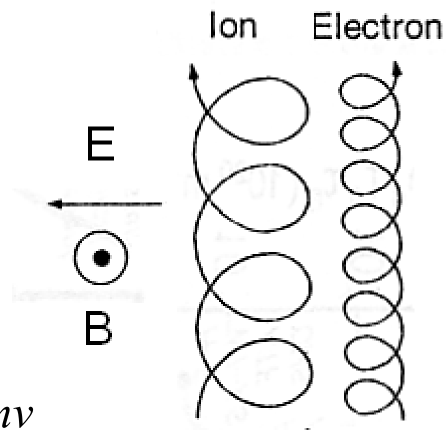


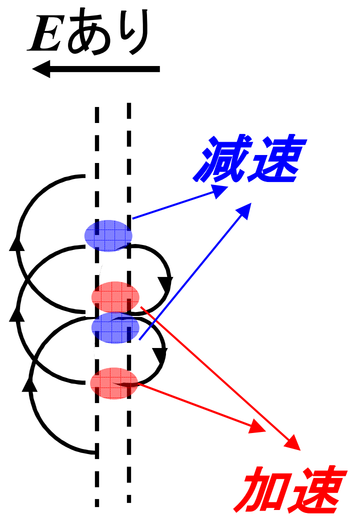
個々の荷電粒子の振舞いの基本；粒子のドリフト (I)

荷電粒子は0次の運動としては磁力線に巻きついて運動するが、磁場強度に分布があったり、電場があると磁力線から離れる運動(ドリフト)をする。これを理解することがプラズマの振舞いの定性的な理解につながる。



$$\frac{mv^2}{\rho_L} = qvB \Rightarrow \rho_L = \frac{mv}{qB}$$





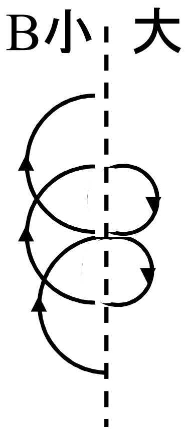
ExB ドリフト

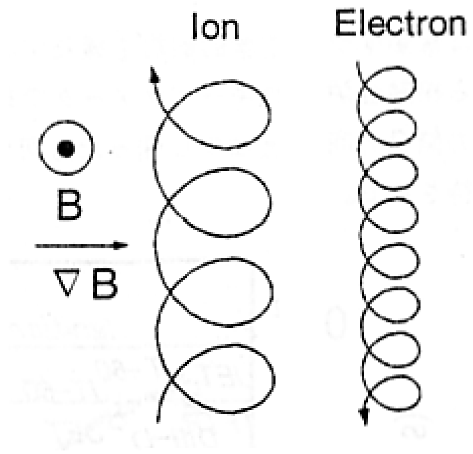
荷電粒子の速度が回転中に変化するため、イオンはExB方向へドリフトする。

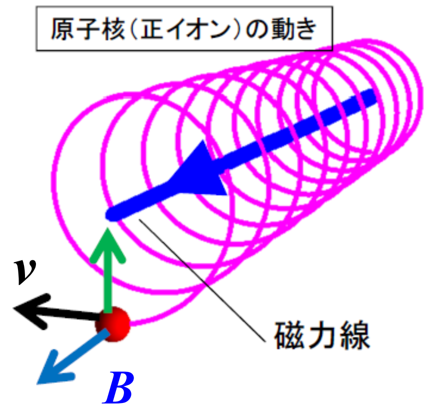
電子も同方向へドリフトする。

個々の荷電粒子の振舞いの基本; 粒子のドリフト (II)

荷電粒子は0次の運動としては磁力線に巻きついて運動するが、磁場強度に分布があったり、電場があると磁力線から離れる運動(ドリフト)をする。これを理解することがプラズマの振舞いの定性的な理解につながる。







$$\frac{mv^2}{\rho_L} = qvB \Rightarrow \rho_L = \frac{mv}{qB}$$

Bx∇B ドリフト

ラーマ半径が回転中に変化するため、イオンはBx∇B 方向へドリフトする。

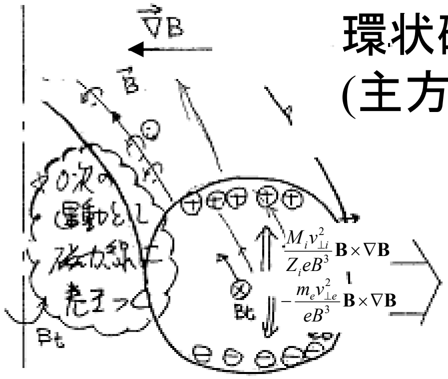
電子は反対方向へドリフトする。

環状磁場のみでプラズマは閉じ込められない – 粒子的描像

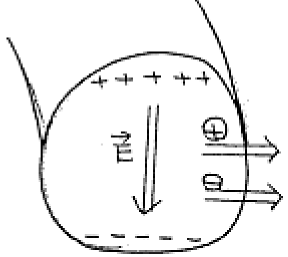
–

環状磁場のみでは、プラズマは閉じ込められない(そっと置いてもプラズマは逃げてしまう)

環状磁場のみ($B_t \neq 0$, $B_p = 0$)
(主方位角方向の磁場のみ)



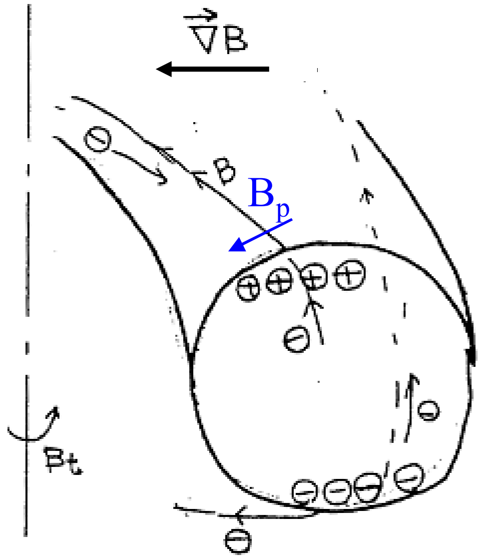
Bx▽B ドリフト



ExBドリフト

理由

(1) Bx▽B ドリフトにより電荷の分離が起こる。
(2) 分離した電荷により電場が生じ、生じた電場によりイオン、電子がドーナッツの外側に逃げてしまう。



電子の方が軽く移動しやすいので、電子が動く

対処法

副方位角方向の磁場を付加し($B_p \neq 0$)、ドーナッツ上部と下部に分離した電荷を短絡する。

⇓

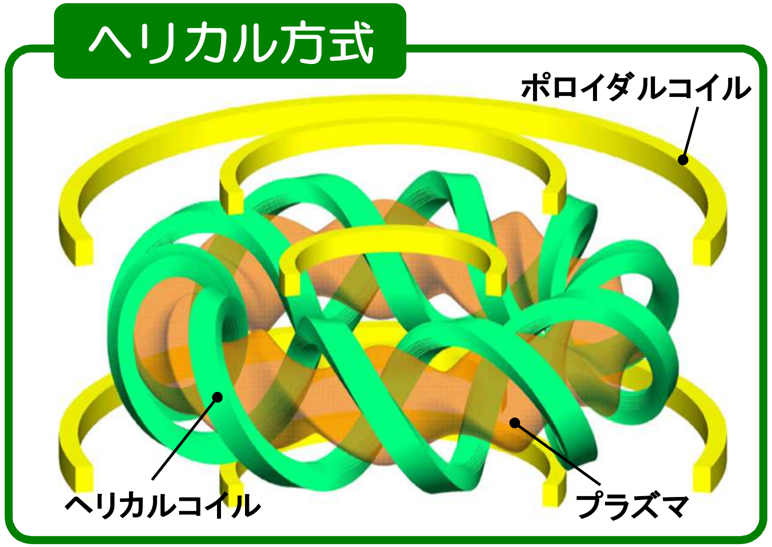
ExBドリフトによるプラズマの移動を抑える。

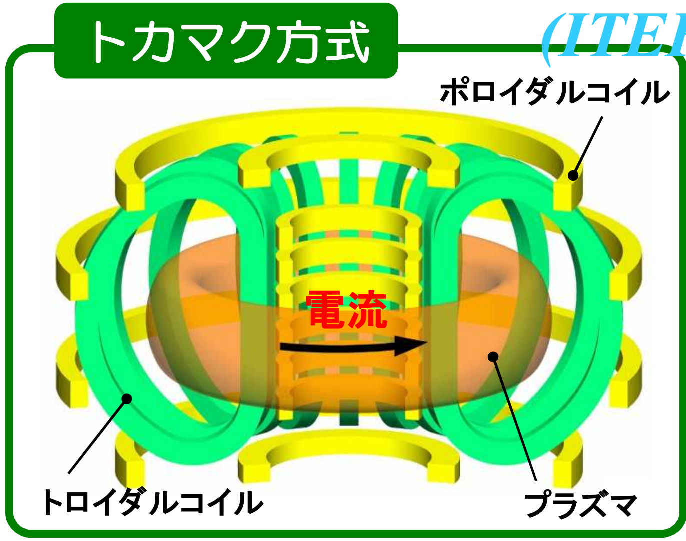
B_pの生成法

トカマク/ プラズマ中に電流を流す。
ヘリオトロン(ヘリカル)/外部コイルを螺旋状にねじる。

どのようにして、磁場をねじるか
ーヘリカル方式とトカマク方式ー

国際熱核融合炉
(ITER/仏)





外部コイルのみにより回転変換を与え、磁気面を形成する。

連続運転に適している。

構造が複雑。

核融合研のLHD

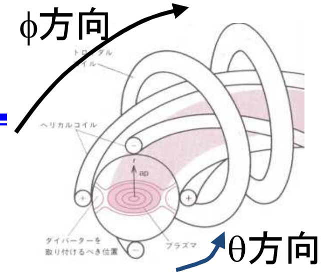
我が国独自のアイデアにより開発（我が国のオリジナル）。

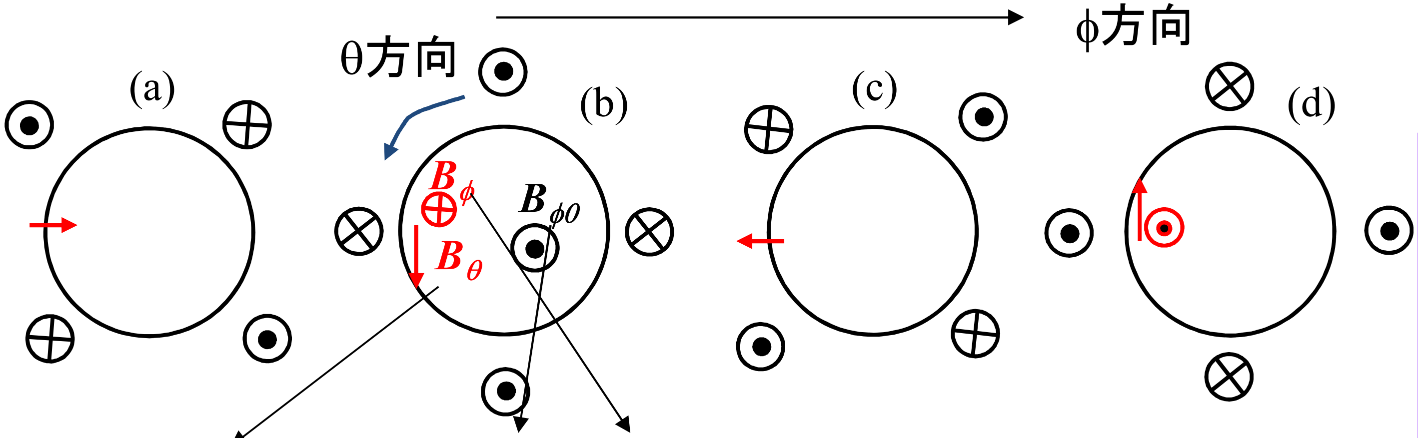
トーラス方向に電流を流すことにより回転変換を与え、外部コイルとの組み合わせにより磁気面を形成する。

連続運転のためには、プラズマ電流を維持する必要がある。

構造が簡単。

ヘリカルコイルで「磁場の捩じれ」が生じる理由



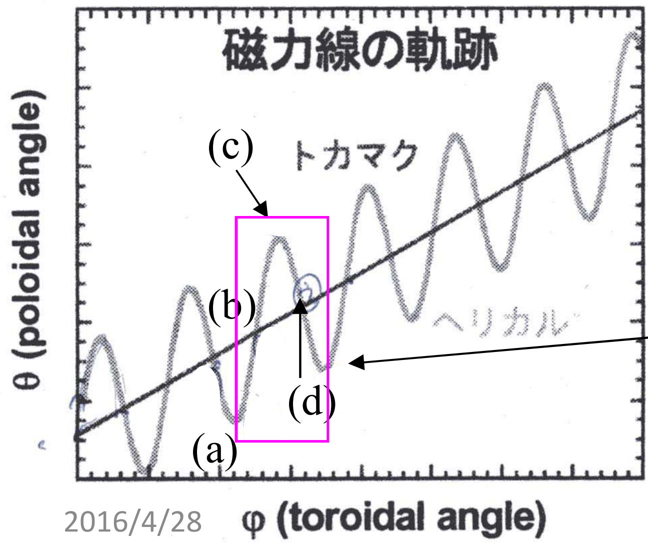


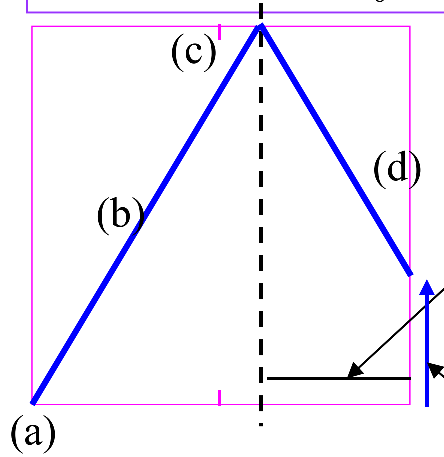
$B_\theta \sim \cos(L\theta - M\phi)$, $B_\phi \sim [1-\delta\cos(L\theta - M\phi)]$

L,Mはそれぞれポロイダル局数，トロイダル周期数，
図の例では，L=2.

磁力線(磁気面)の径方向の動きは，磁束保存(等磁束面が磁気面)から説明．
主な磁場はB_ϕなのでB_ϕが小さい時は小半径が大きくなり，大きい時はその逆．

B_θが正の間はB_ϕが1より小さく，B_θが負の間はB_ϕが1より大きい．つまり，B_θが正の間は磁力線は方向にあまり進まず，B_θが負の間に磁力線は早く前に進む．



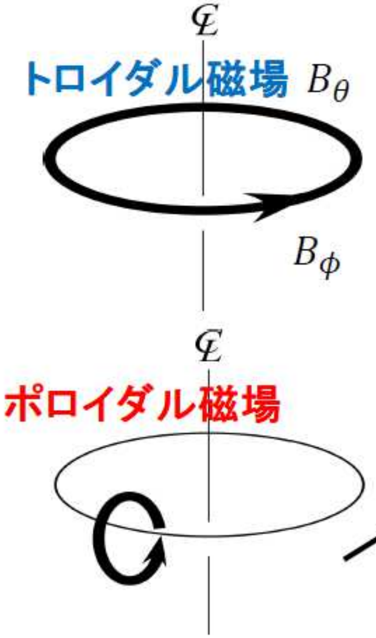


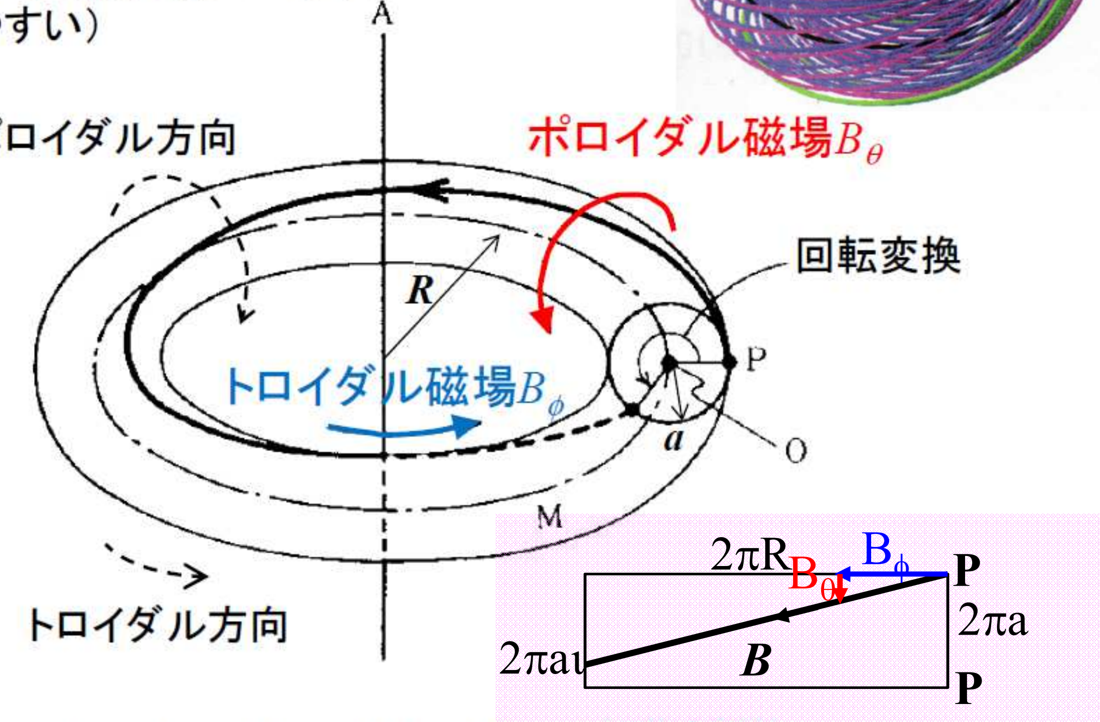
こちらのほうが短い，
その前の半周期でθ方向に進んだ分，戻ってこない
=>
磁力線はθ方向に進む

どのようにして高温のプラズマを閉じ込めるのか?

トーラス磁場による閉じ込め

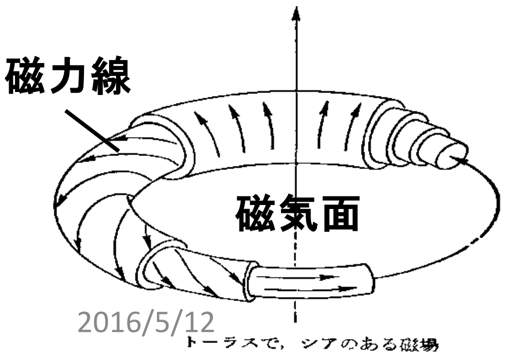
荷電分離を防ぐために、トーラスの上下を磁力線でつなぐ。
(荷電粒子は磁力線方向には動きやすい)





ポロイダル方向に捻りを加える(**回転変換** ι)

安全係数 $q = \dfrac{1}{\iota} = \dfrac{aB_\phi}{RB_\theta}$



磁力線(螺旋形状の縦糸)で
作ったドーナツ状の**かご** **磁気面**

ドリフトに関連する大きさ

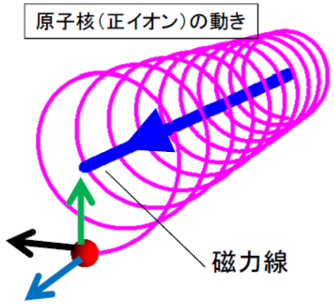
サイクロトロン周波数

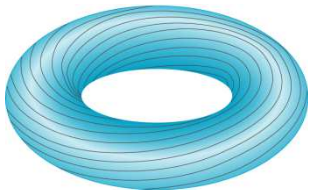
$$f_{c,s}=\frac{\omega_{c,s}}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\frac{q_sB}{m_s}=\begin{cases} electron: 28.0B\ \ \text{(GHz)} \\ ion:\quad 15.2\dfrac{Z}{A}B\ \ \text{(MHz)} \end{cases}$$

$B\,[\text{in T}], T\,[\text{in keV}]$

Larmor半径

$$\rho_s=\frac{v}{\omega_{c,s}}=\frac{m_sv}{q_sB}=\begin{cases} electron: 0.11\dfrac{T^{0.5}}{B}\ \text{(mm)} \\ ion:\quad 4.6\dfrac{A^{0.5}T^{0.5}}{B}\ \text{(mm)} \end{cases}$$





磁場5T, 温度10keVとすると、
水素イオンのラーマ半径 は2.9mm、電子のラーマ半径は0.07m。

Bx▽B ドリフト

$$\mathbf{u}_{B\times\nabla B}=\frac{1}{2}v_\perp\rho_L\frac{\mathbf{B}\times\nabla\mathbf{B}}{B^2}$$

磁場5T, 温度10keV, 大半径3mの環状プラズマでは、

$$u_{B\times\nabla B}\sim\frac{v_{th}}{2}\rho_L\frac{1}{L}\sim\frac{\rho_L}{L}v_{th}\quad\sim\frac{2.9mm}{3m}v_{th}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\nabla B\sim B_0\frac{\partial}{r\partial\theta}(1-\frac{r}{R}\cos\theta)\sim\frac{B_0}{R}$$

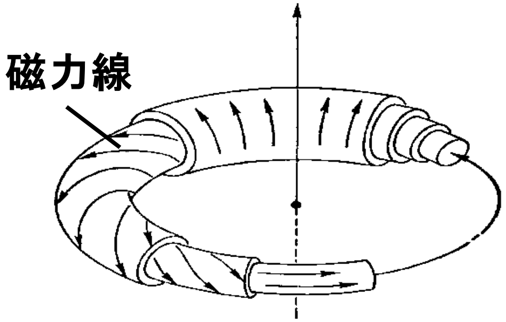
ExB ドリフト

$$\mathbf{u}_{E\times B}=\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B^2}$$

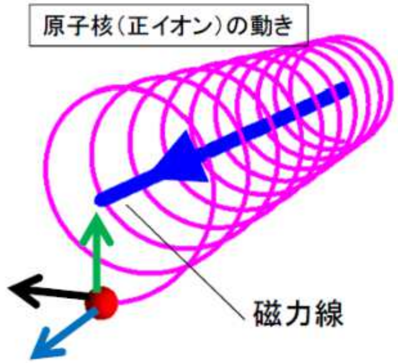
E~T/qLとする(Tは温度、qは電荷、Lは装置サイズ)と、磁場5T, 温度10keV, 小半径1mの環状プラズマでは、

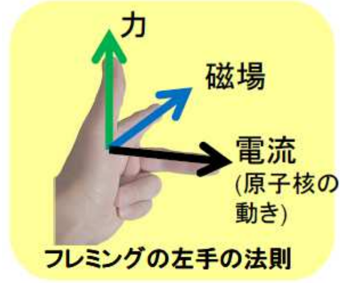
$$u_{E\times B}\sim\frac{T}{qBL}\sim\frac{v_{th}/2}{qB/m}\frac{1}{L}v_{th}\sim\frac{\rho_L}{L}v_{th}\quad\sim\frac{2.9mm}{1m}v_{th}$$

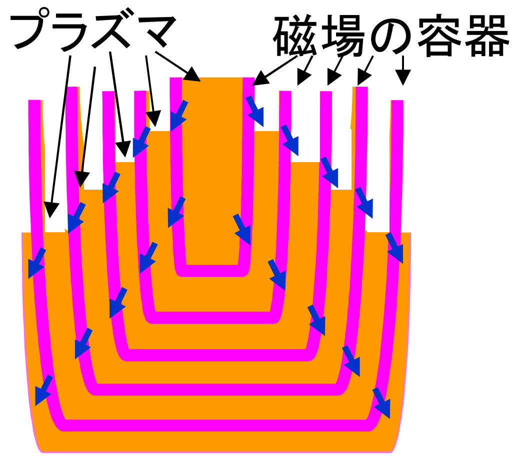
「磁気面」と局所熱平衡



トーラスで，シアのある磁場







- 熱平衡状態(衝突が十分大きく、十分時間がたった状態)粒子群の速度分布は等方で、ガウス分布（マックスウェル分布）となる。

$\rho = \rho(\psi, t)$;　質量密度

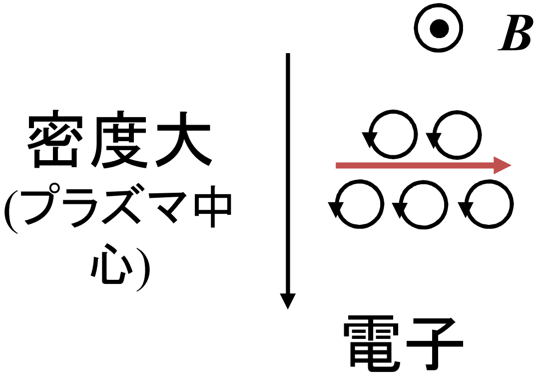
$p = p(\psi, t)$;　圧力

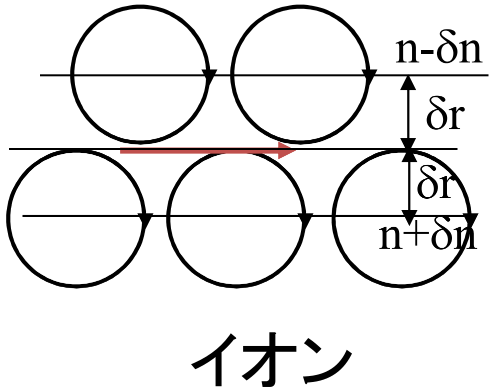
$T = T(\psi, t)$;　温度

ψ;　磁気面の「ラベル」

プラズマ圧力がある時の閉込め磁場の変化 －流体的描像－

磁場中で密度、温度(圧力)勾配があると電流が流れる





$j_i = q_i e v_i x 2\delta n$ (i; イオン)

$\delta n = (dn/dr)\delta r$

$M_i v_i^2/\delta r = q_i e v_i B$ (遠心力と電磁力の釣合)

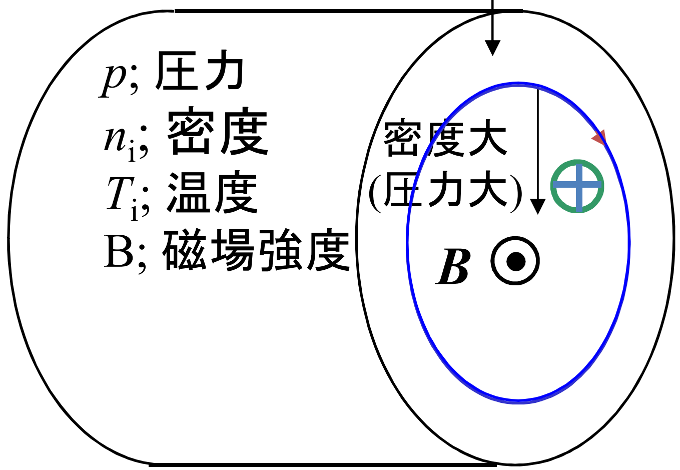
↓

$j_i = (1/B)(2M_i v_i^2)(dn/dr)$

温度の勾配がある時は、(1)式で、δv_iが存在するので、同様に電流が流れる($T_i = M_i v_i^2/2$に注意)。電子に関しても、(1)式を考え、$p = (n_e T_e + n_i T_i)$とすると、流れる電流値の総和は

$$\boxed{j \propto \left| \frac{1}{B} \frac{\partial p}{\partial r} \right|}$$

流れる向きは、元の磁場を小さくする方向 => 反磁性電流



磁場、圧力勾配の両方に垂直で、dp/drに比例、Bに反比例 => $\boldsymbol{j} \mathrm{x} \boldsymbol{B} = \mathrm{grad}\, \boldsymbol{P}$

電流が流れることにより、磁場が変化すること。圧力勾配は電流、磁場双方に垂直であるため、磁場の向きが変わると圧力分布も変わることに注意(トーラス形状では磁場の向きも変化; 後述)。
=> 反磁性電流が有限圧力時の磁場構造(MHD平衡)を真空磁場から変える源

磁場強度に不均一性がある時の反磁性電流 －流体的描像－

jxB=grad P

$$\mathbf{B}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{B})$$
$$=> B^2\mathbf{j}-B^2\mathbf{j}_{//}\equiv B^2\mathbf{j}_{\perp}$$
$$=> B^2\mathbf{j}_{\perp}=\mathbf{B}\times\nabla p$$

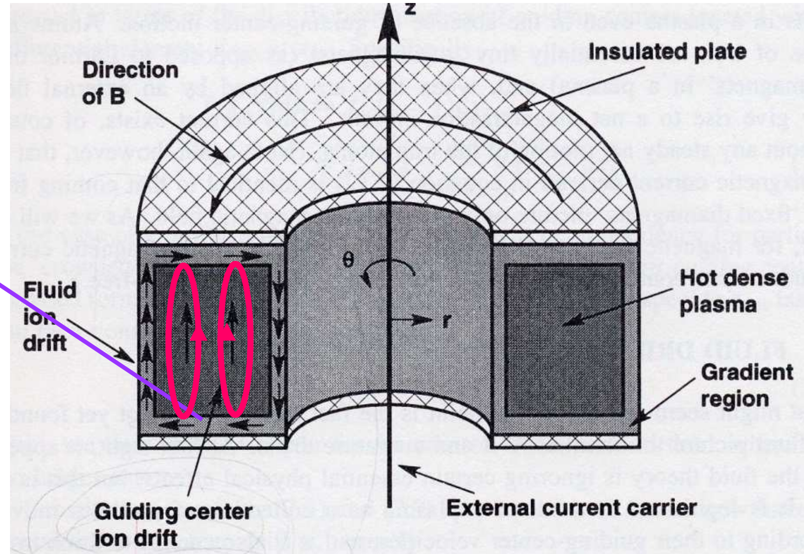
$$\boxed{j_R=\frac{|\nabla p|}{B}}$$

ここで、磁場に
B=R$_0$B$_0$/R
の不均一性が
あったとする。

単純トーラス
(z軸に電流
がある時の
磁場配位)で
達成される

$$\boxed{j_R=R\frac{|\nabla p|}{R_0B_0}}$$

トーラス外側に行く
ほど電流密度 大



一方、電子と単一イオンからなる
プラズマの「連続の式」

$$\frac{\partial n_{i,e}}{\partial t}+\nabla\cdot(n_{i,e}\mathbf{v}_{i,e})=0 \quad \text{から}$$

$$\boxed{\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{j}=0}$$

$$\left(\because\sigma\equiv\sum_{j=i,e}q_jn_j,\ \mathbf{j}\equiv\sum_{j=i,e}q_jn_j\mathbf{v}_j\right)$$

このような電流の発散を考えると

$$\nabla\cdot\mathbf{j}=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\times R\frac{|\nabla p|}{R_0B_0}\right)\approx\frac{2\nabla p}{RB}\neq 0$$

$$\boxed{\Rightarrow\frac{\partial\sigma}{\partial t}\neq 0}$$

連続の式

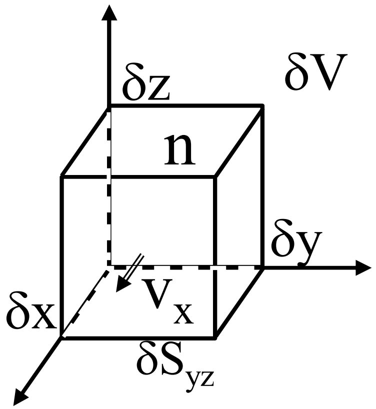
左図のような微小体積要素δV (=δxδyδz)を考える。

まず、簡単のため体積要素δV内の密度nの粒子がx方向の速度のみ(v_x)を持っているとする。
この時、ある時間Δtの間に、δS_{yz}から失われる粒子数は、

$$n\mathrm{v}_x \delta S_{yz} \Delta t$$

これが、体積要素内の粒子数の総量の変化ΔNに等しいことから、

$$-\Delta N = -\Delta\left(n\delta V\right) = n\mathrm{v}_x \delta S_{yz} \Delta t$$



ここで、x方向以外にも速度を持つと考え、その速度を**v**で表し、$\delta\boldsymbol{S}$を体積要素の面要素ベクトルとして、最右辺を

$$n\mathrm{v}_x \delta S_{yz} \Delta t ==> \sum_{i,j,k=x,y,z} n v_i \delta S_{jk}\ \Delta t ==> \int_{S(\delta \mathrm{V})} n\mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}\ \Delta t$$

と近似的に置き換える。

また、 $n\delta V ==> \int n\mathrm{d}V,\quad -\dfrac{\Delta N}{\Delta t} ==> -\dfrac{\partial}{\partial t}\int n\mathrm{d}V$ から、

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int n\mathrm{d}V = \int_{S(\delta V)} n\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} ==> \frac{\partial}{\partial t}\int n\mathrm{d}V + \int_{\delta V}\nabla\cdot\left(n\mathbf{v}\right)\mathrm{d}V = 0$$

上式はすべてのδVで成り立つので、$\dfrac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot\left(n\mathbf{v}\right) = 0$

磁場強度に不均一性がある時の反磁性電流 －流体的描像－

jx$\boldsymbol{B}$=grad $\boldsymbol{P}$

$$\mathbf{B}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{B})$$
$$=>B^2\mathbf{j}-B^2\mathbf{j}_{//}\equiv B^2\mathbf{j}_{\perp}$$
$$=>B^2\mathbf{j}_{\perp}=\mathbf{B}\times\nabla p$$

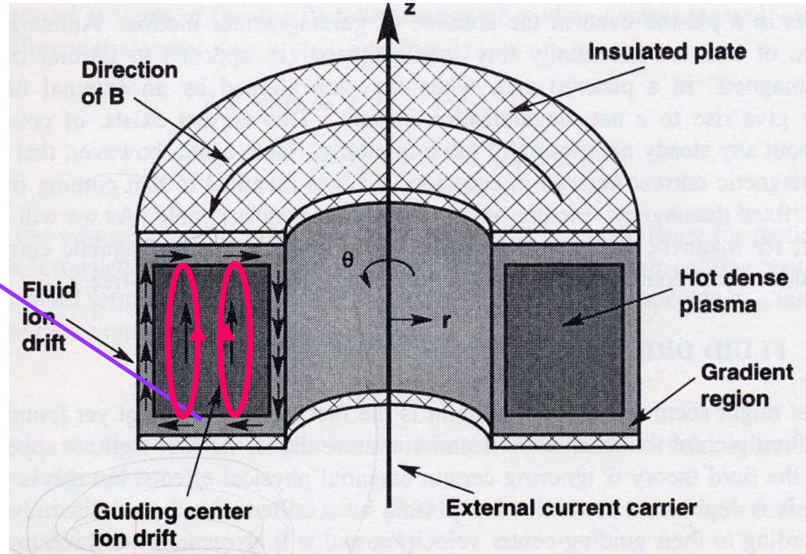
$$j_R=\frac{|\nabla p|}{B}$$

ここで、磁場に
$B=R_0B_0/R$
の不均一性が
あったとする。

単純トーラス
(z軸に電流
がある時の
磁場配位)で
達成される

$$j_R=R\frac{|\nabla p|}{R_0B_0}$$

トーラス外側に行く
ほど電流密度 大



このような電流の発散を考えると

$$\nabla\cdot\mathbf{j}=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\times R\frac{|\nabla p|}{R_0B_0}\right)\approx\frac{2\nabla p}{RB}\neq 0$$

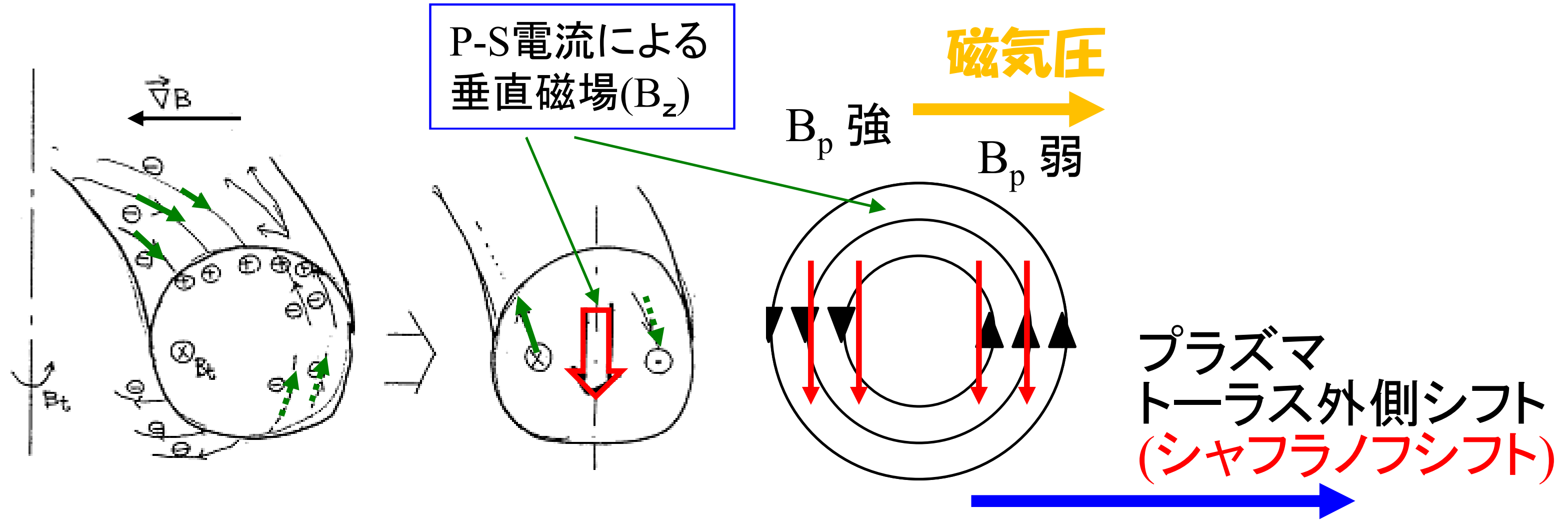
$$\boxed{\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{j}=0}=>\frac{\partial\sigma}{\partial t}\neq 0$$

トーラスの上下で電荷が発生 (∂σ/ ∂ t=/0)

電荷の保存を満たすためには電荷の変化
(磁力線の連結による電荷の短絡)が必要

プラズマによる閉込め磁場の変化

-粒子的描像-



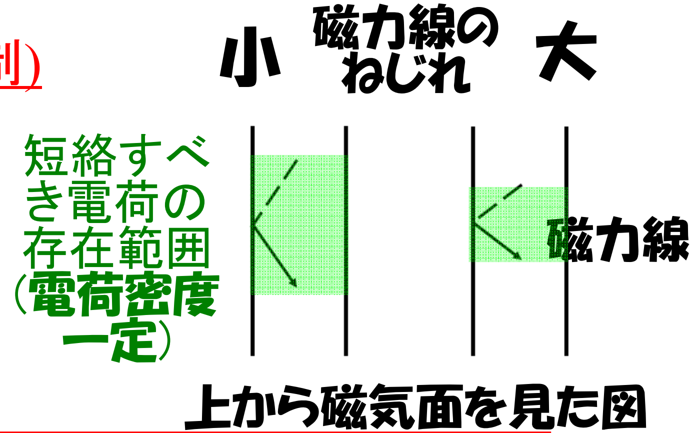
B_pの付加によるExBドリフトの抑制(分離電荷の抑制)

⇓

Pfirsh-Schuter電流(P-S/平衡電流)の生成

⇓

磁気面をトーラス外側へシフトさせる効果



磁力線のねじれ具合(**回転変換)が大きい(ι; 大)ほど、短絡すべき電荷量小**
(P-S電流小)、磁気面シフト量小
プラズマの量が多いほど(dp/dρ; 大)、短絡電流大(P-S電流大)

PS電流の定量化 ($\nabla\cdot\mathbf{j}=0$より)

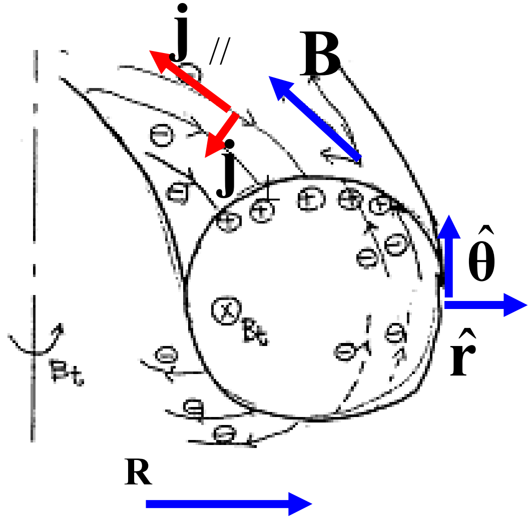
$$\boxed{\nabla\cdot\mathbf{j}_{//} = -\nabla\cdot\mathbf{j}_{\perp}} \quad => \frac{\partial j_{//}}{\partial s} = 2\nabla p\cdot\left(\frac{\nabla B\times\mathbf{b}}{B^2}\right)$$

$$=> \frac{B_\theta}{aB}\frac{\partial j_{//}}{\partial\theta} \sim \frac{\partial p}{\partial r}\frac{1}{R_0B_0}\sin\theta. \quad \left(\because \iota = \frac{1}{q} \equiv \frac{B_\theta/r}{B_\phi/R}\right)$$

$$\boxed{=> j_{//} \sim -\frac{1}{\iota B_0}\frac{\partial p}{\partial r}\cos\theta. \quad \left(\because B_\phi\sim B_0, R\sim R_0\right)}$$

定量化

$$\nabla p\sim\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial p}{\partial r},\ \hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\nabla B\sim B_0\frac{\partial}{r\partial\theta}(1-\varepsilon\cos\theta). \quad \left(\varepsilon\equiv\frac{r}{R}\right)$$



磁力線方向の$j_{//}$が反磁性電流の発散と釣り合う必要があるが，**ι(回転変換/磁力線のねじれ具合が大きいほど**短絡する電荷は少なくてよいので、上式のように**$j_{//}$は小さくてよい.**

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{\partial}{\partial\theta} \sim \frac{B_\theta}{aB}\frac{\partial}{\partial\theta}. \quad \left(\because \frac{ds}{B} = \frac{a\,d\theta}{B_\theta}\right)$$

$$\mathbf{B}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{B}) => B^2\mathbf{j} - B^2\mathbf{j}_{//} \equiv B^2\mathbf{j}_{\perp}$$

$$\mathbf{j}\times\mathbf{B} = \nabla p ==> B^2\mathbf{j}_{\perp} = \mathbf{B}\times\nabla p$$

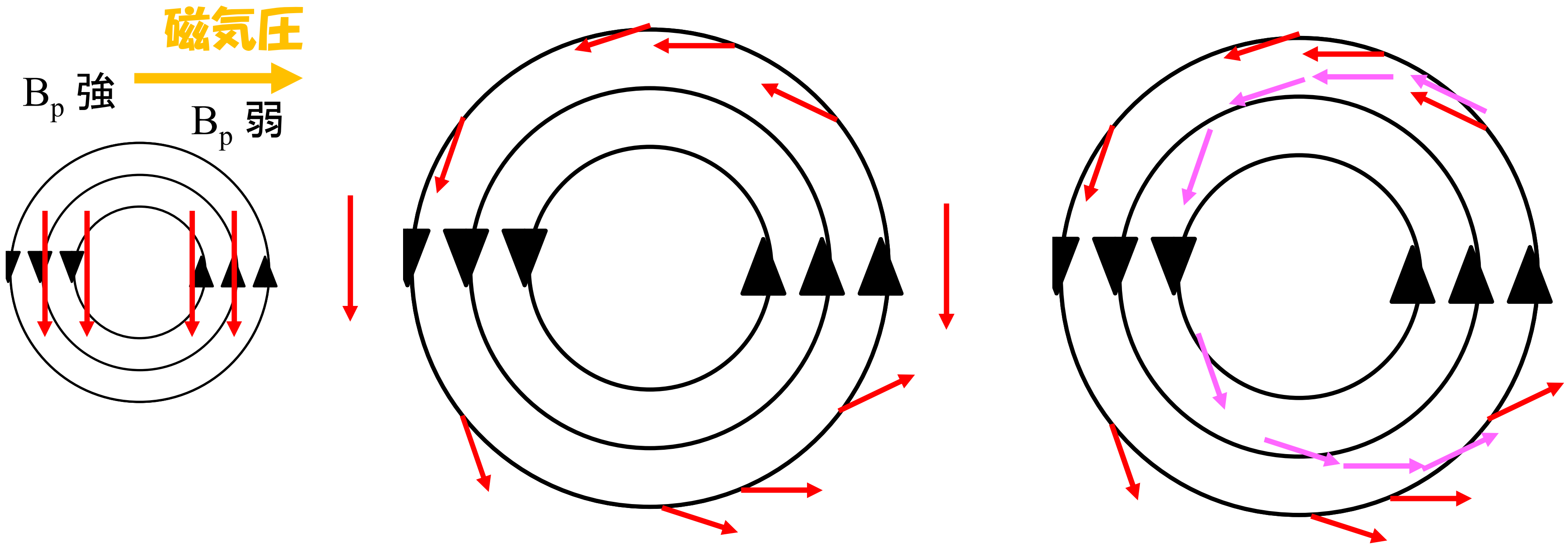
$$\nabla\cdot\mathbf{j}_{\perp} = \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{B}\times\nabla p}{B^2}\right)$$

$$\nabla\cdot(f\mathbf{x}) = f\nabla\cdot(\mathbf{x}) + (\mathbf{x}\cdot\nabla)f$$

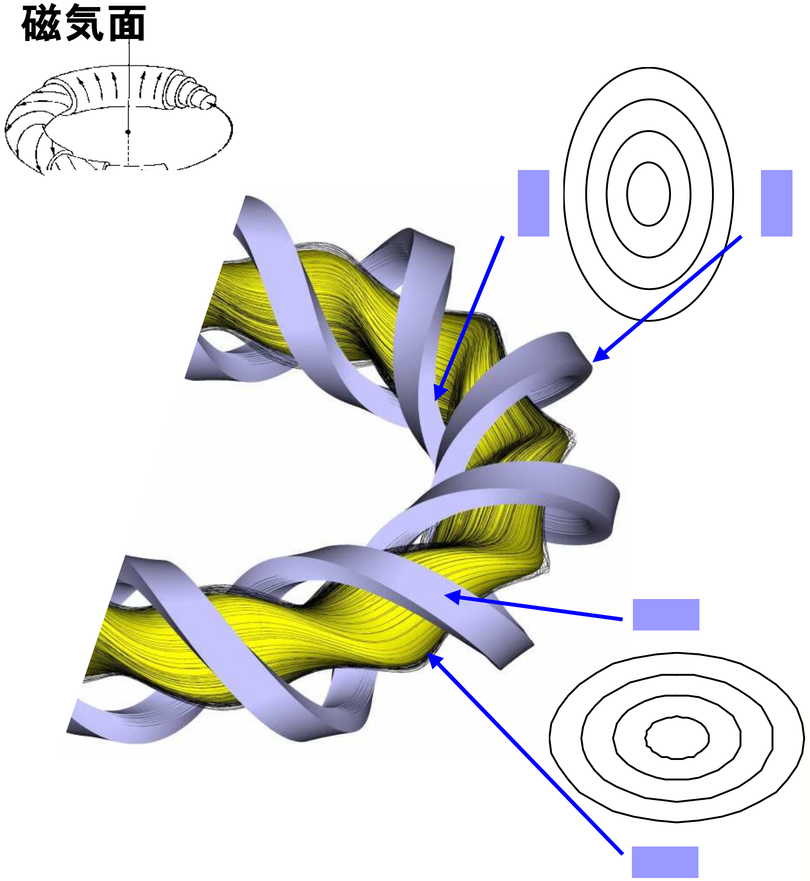
$$\nabla\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{y}) = \mathbf{y}\cdot\nabla\times\mathbf{x} - \mathbf{x}\cdot\nabla\times\mathbf{y}$$

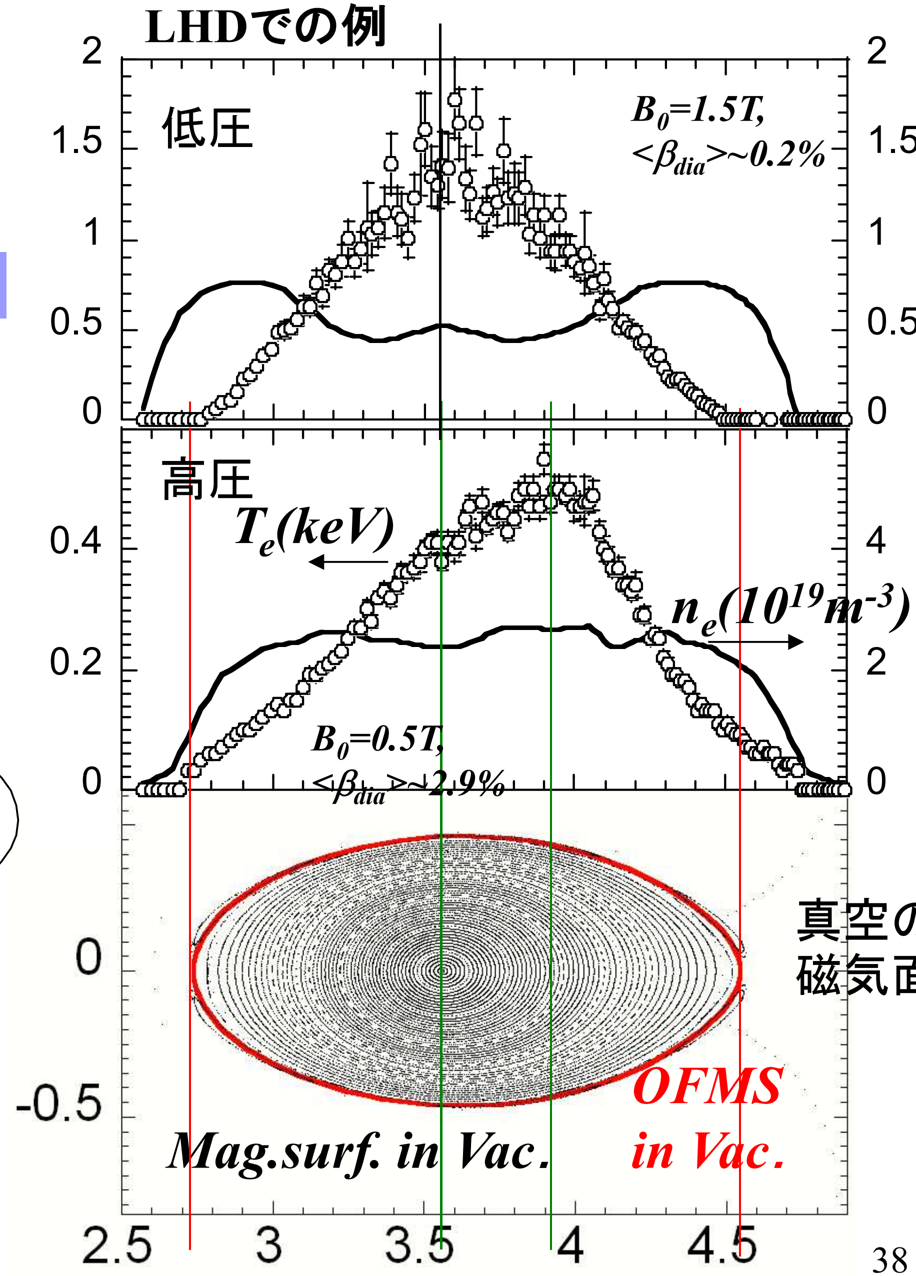
$$\mathbf{j}\cdot\nabla p = 0 \quad (\because \mathbf{j}\cdot(\mathbf{j}\times\mathbf{B}) = \mathbf{j}\cdot\nabla p)$$

プラズマによる閉込め磁場の変化



プラズマ圧力勾配や電流による閉込め容器(磁場構造)の変形

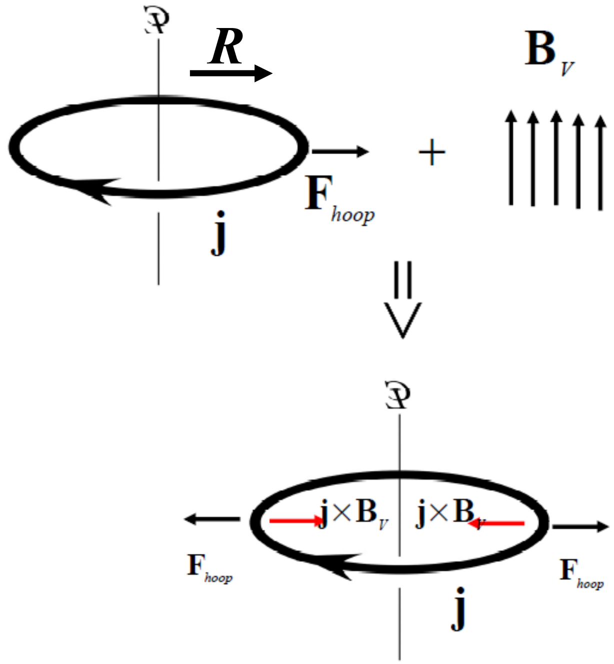




プラズマ圧力により電流が駆動
=> 元の磁場を変更
=> 閉込め容器を変形

プラズマリングの平衡

トロイダル方向に電流が流れている細いプラズマリングを考える。



電流の流れているプラズマリングには、大半径外側に広がろうとする電磁力(フープ力)が働く。

プラズマリングをその位置に留める(平衡をとる)ためには、フープ力と釣り合うような電磁力(jxB)が作用する鉛直方向の磁場B_vを重畳する必要がある。

プラズマ電流I_p, 自己インダクタンスLのリングのフープ力F_{hoop}は、電流の流れているプラズマリングの磁気エネルギーU_Mの大半径方向の変化量に等しいので、

$$\mathbf{F}_{hoop} = \boxed{\frac{\partial U_M}{\partial R}} = \frac{I_p^2}{2}\frac{\partial L}{\partial R} \qquad \because \boxed{U_M = \frac{1}{2} L I_p^2}$$

大半径R, 小半径aの円環電流の自己インダクタンスLは、

$$\boxed{L = \mu_0 R\left(\ln\frac{8R}{a} + \frac{l_i}{2} - 2\right)}$$

l_iは内部インダクタンス

$$\mathbf{F}_{hoop} = \frac{\mu_0 I_p^2}{2}\left(\ln\frac{8R}{a} + \frac{l_i}{2} - 1\right)$$

したがって、平衡のために必要な垂直磁場は、

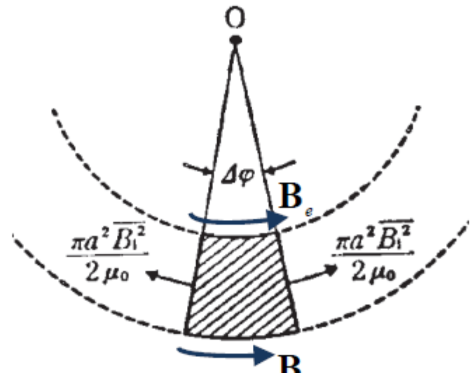
$$B_V = -\frac{\mu_0 I_p}{4\pi R}\left(\ln\frac{8R}{a} + \frac{l_i}{2} - 1\right)$$

$$\boxed{\because \mathbf{F}_{hoop} + 2\pi R I_p B_V = 0}$$

プラズマリングの平衡 II

Advanced

より詳しく考察すると、フープ力以外にも、プラズマリングには、大半径外側に広がろうとする力が働く。



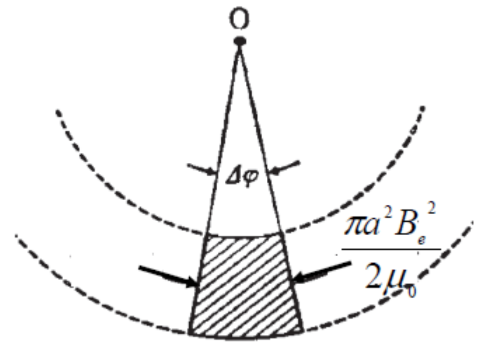
1) プラズマ圧力による広がる力 F_{p}

プラズマリングのプラズマ内部エネルギーU_{p}の大半径方向の変化量に等しいので、

$$\because U_p = \overline{p} V_p = \overline{p}\left(2\pi R \cdot \pi a^2\right)$$

$$\mathbf{F}_p = \frac{\partial U_p}{\partial R} = \overline{p}\frac{\partial V_p}{\partial R} = 2\pi^2 a^2 \overline{p}$$

2) トロイダル方向の磁場B_ϕの張力により広がる力 F_{B}



プラズマ内部の磁気圧を $\overline{B}_i^2/2\mu_0$ とすると、右図の斜線部の小片には両端の面に内部磁場による張力 ΔF_{B1} が働いている。

$$\Delta\mathbf{F}_{B1} = -2\frac{\pi a^2 \overline{B}_i^2}{2\mu_0}\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \sim -\frac{\pi a^2 \overline{B}_i^2}{2\mu_0}\Delta\varphi$$

一方、右図の斜線部の小片にかかる外部磁場による張力 ΔF_{B2}は、プラズマ内部の磁場と外部の磁場が同じであれば、斜線部の小片の両端の面による張力と釣り合うので、向きは反対で大きさは同じ

$$\Delta\mathbf{F}_{B2} \sim \frac{\pi a^2 B_e^2}{2\mu_0}\Delta\varphi$$

F_{B2}は、ΔF_{B1}とΔF_{B2}の和をトーラス全周に積算したものなので、

$$\mathbf{F}_B = \left(\Delta\mathbf{F}_{B1} + \Delta\mathbf{F}_{B2}\right)\cdot\frac{2\pi}{\Delta\varphi} = \frac{\pi^2 a^2\left(B_e^2 - \overline{B}_i^2\right)}{\mu_0}$$

プラズマリングの平衡 III

Advanced

したがって、プラズマリングにかかる大半径外側に広がる力の合計は、

$$\mathbf{F}_{hoop}+\mathbf{F}_p+\mathbf{F}_B=\frac{\mu_0 I_p{}^2}{2}\left(\ln\frac{8R}{a}+\frac{l_i}{2}-1\right)+2\pi^2a^2\overline{p}+\frac{\pi^2a^2\left(B_e{}^2-\overline{B}_i{}^2\right)}{\mu_0}$$

プラズマ境界での力のつり合いより $\overline{p}+\frac{\overline{B}_i{}^2}{2\mu_0}=\frac{B_{ep}{}^2}{2\mu_0}+\frac{B_e{}^2}{2\mu_0}$

$$=>\frac{\mu_0 I_p{}^2}{2}\left(\ln\frac{8R}{a}+\frac{l_i}{2}-1\right)+2\pi^2a^2\overline{p}+2\pi^2a^2\left(\overline{p}-\frac{B_{pe}{}^2}{2\mu_0}\right)$$

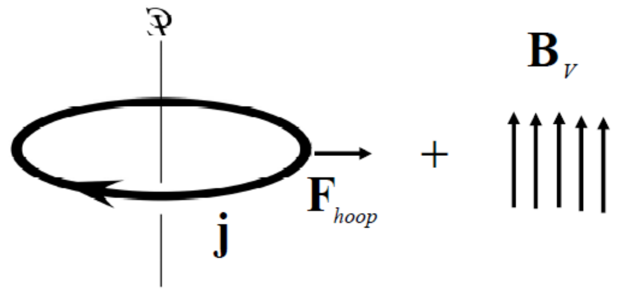
$\beta_p\equiv\frac{\overline{p}}{B_{ep}{}^2/2\mu_0}$ と定義し、 $2\pi a B_{pe}=\mu_0 I_p$ を使うと、

$$=>\frac{\mu_0 I_p{}^2}{2}\left(\ln\frac{8R}{a}+\frac{l_i}{2}-1+\frac{\beta_p}{2}+\frac{\beta_p}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

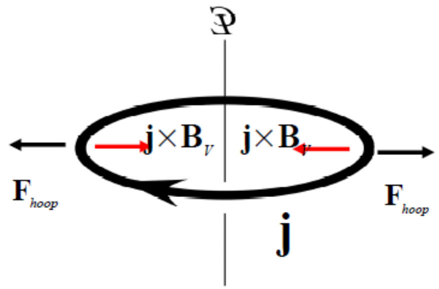
$\boxed{\mathbf{F}_{hoop}+\mathbf{F}_p+\mathbf{F}_B+2\pi R I_p B_V=0}$ より、平衡に必要な垂直磁場は

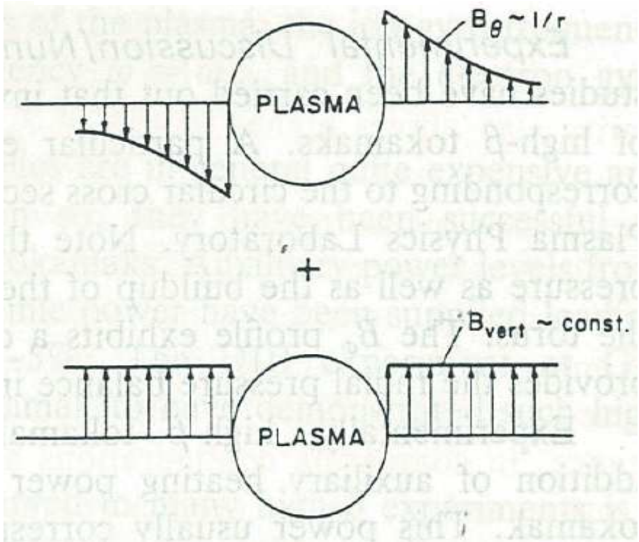
$$\boxed{B_V=-\frac{\mu_0 I_p}{4\pi R}\left(\ln\frac{8R}{a}+\frac{l_i}{2}-\frac{3}{2}+\beta_p\right)}$$

平衡限界

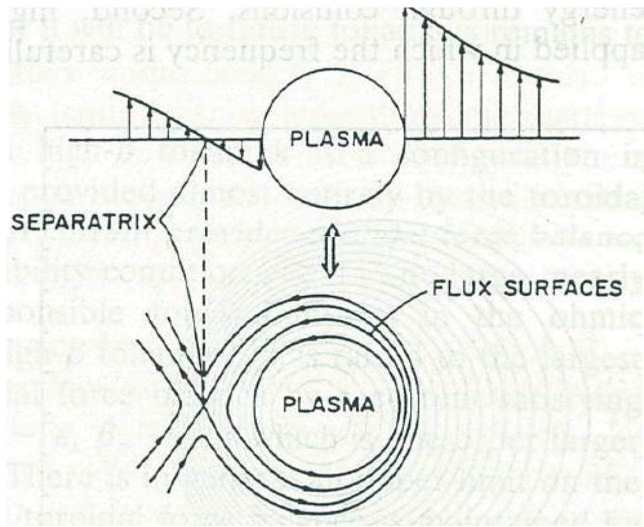


=>





=>



$$\boxed{B_V = -\frac{\mu_0 I_p}{4\pi R}\left(\ln\frac{8R}{a} + \frac{l_i}{2} - \frac{3}{2} + \beta_p\right)}$$

プラズマ圧力が増加すると、
平衡に必要ながB_V増加。

I_pが同じままB_Vが大きくなると、セパラトリックスがプラズマ領域に侵入し、プラズマが小さくなる

閉じ込め可能な圧力に上限
=> **平衡限界**

縦長だと断面積を大きく取れ、有利。

{24·2}　半径 a の断面をもつ，透磁率 μ，平均半径 R $(R \gg a)$ の円環状導線の自己インダクタンスを求めよ．

解　まず内部インダクタンス L_i については，$R \gg a$ であるから，電流が断面に一様に分布するとすれば，〔16〕と同様になるので

$$L_i = \frac{\mu(2\pi R)}{8\pi} = \frac{\mu R}{4}$$

次に外部インダクタンスであるが，外部磁界は電流 I が導線の中心線 C に集中していると考えたときと同じである．円環内に生ずる磁束を Φ とすると，外部インダクタンス L_e は $\Phi = L_e I$ から求められる．この Φ は C に電流 I を流すときに，環の内側の周 C' 内に生ずる磁束であるから，C と C' の間の相互インダクタンス M は $\Phi = MI$ から求められる．したがって M を計算することによって L_e が求められる．ところで前問より

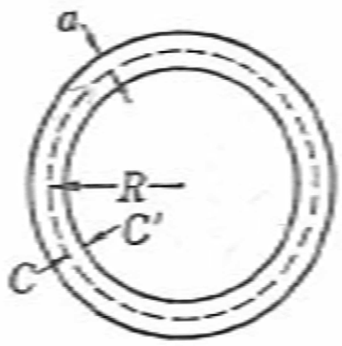


図 8·54

$$M = \mu_0 R\left(\log\frac{8R}{a} - 2\right)$$

$$\therefore \quad L = L_i + L_e = L_i + M = R\left\{\mu_0\left(\log\frac{8R}{a} - 2\right) + \frac{\mu}{4}\right\}$$

〔16〕 半径 a の円形断面をもつ，長さ l，透磁率 μ の円筒状導線の自己インダクタンスを，電流が断面を一様な密度で流れるとして，求めよ．また電流が表面にのみ分布するときはどうか．

解 (1) まず導線内の磁束を考える．電流 I が断面に一様に分布しているときは，中心軸より r の距離の点での磁界は $H=(I\cdot r^2/a^2)/2\pi r=rI/2\pi a^2$．半径 r，厚さ dr の円筒環の部分を考えると，その部分の磁束は $d\phi=\mu H\cdot l dr$ である．この磁束は導線全部と鎖交するのではないから鎖交回数 N は 1 ではなくて，鎖交するのは全体の r^2/a^2 の部分であるから $N=r^2/a^2$ である．したがってこの部分の鎖交磁束は

$$d\Phi_i=Nd\phi=\frac{r^2}{a^2}\cdot\mu H\cdot l dr=\frac{\mu r^3 lI}{2\pi a^4}dr$$

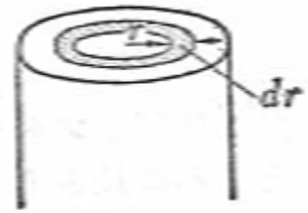


図 8·27

$$\therefore\quad 全鎖交磁束\ \Phi_i=\int d\Phi_i=\frac{\mu lI}{2\pi a^4}\int_0^a r^3 dr=\frac{\mu l}{8\pi}I$$

$\Phi_i=L_i I$ とすると

$$L_i=\frac{\mu l}{8\pi}$$

この L_i を内部インダクタンスという．L_i は導線の半径に無関係である．

目次

0. イントロ
(MHD研究の意義;熱核融合発電炉の開発研究での位置づけ等)

1. MHD平衡特性、安定特性の粒子的描像と流体的描像の概説

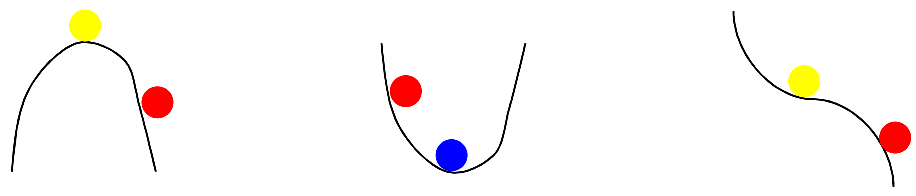
2. 速度分布関数とは

3. 流体方程式と電磁流体方程式(MHD方程式)とは

4. MHD方程式に基づくプラズマのMHD平衡特性、安定特性の評価例

5. MHD研究のトピックス等

MHD平衡、安定性研究とは?

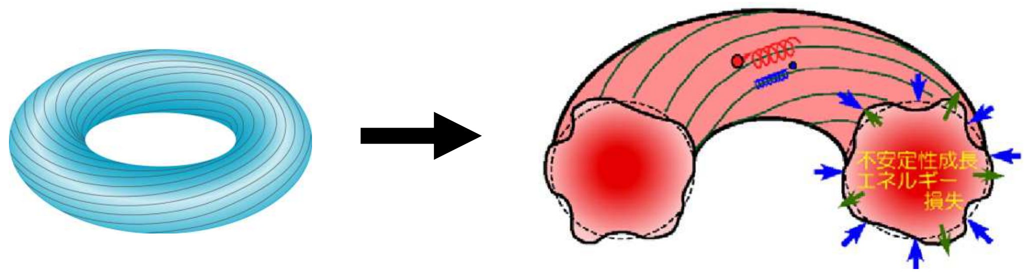


● 非平衡、不安定

● 平衡、不安定

● 平衡、安定

MHD安定性研究;
磁場中でじっとしているプラズマをちょっとだけ動かしてみた時、プラズマはその場に留まっているか? 逃げ出してしまわないか? 逃げ出すとしても全て逃げ出すのか? 留まっているための条件は何か?



プラズマは荷電粒子の集まりなので、荷電粒子が動くと電流、磁場を発生する(特に、圧力勾配があると電流が誘起される); 複雑化

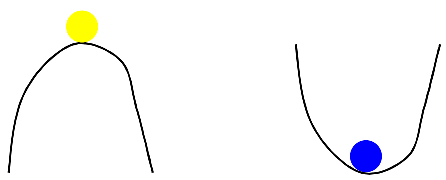
典型的な不安定状態では、プラズマの平均的な位置は変わらず、揺動が大きくなり、最終的にはプラズマを破壊する。

MHD不安定性の原因

磁場中のプラズマが不安定になる原因は、以下の2つ.
(1) 圧力勾配 (圧力駆動型)
(2) 電流 (電流駆動型)

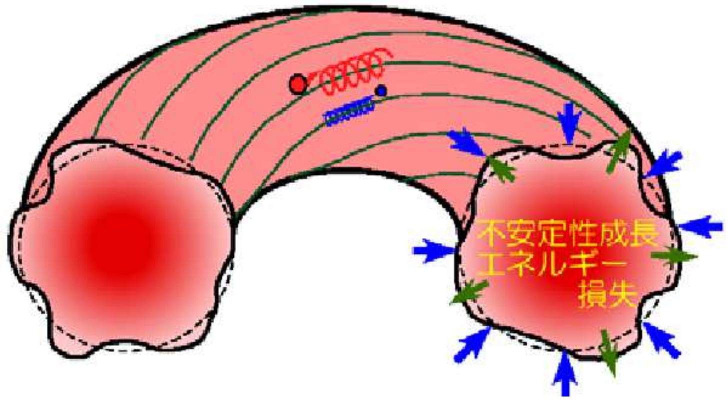
(1)はヘリオトロン(ヘリカル)方式でよく問題になり,
(2)はトカマク方式でよく問題となる.

MHD安定か否か?



● 平衡、不安定

● 平衡、安定



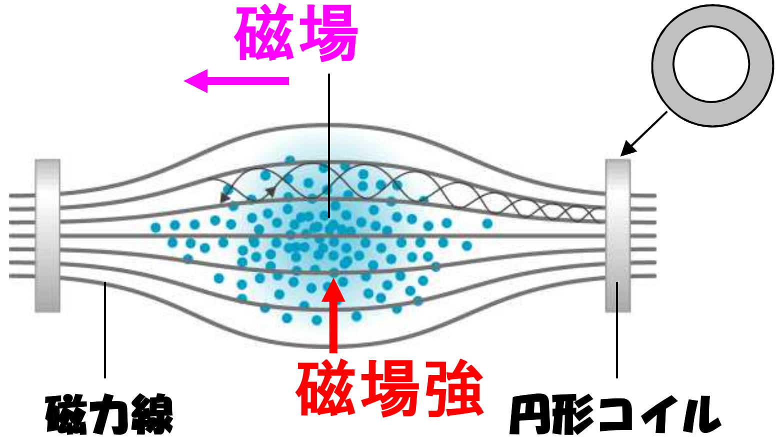
プラズマを揺らすとその振幅が大きくなるか? 元の位置のとどまれるか?

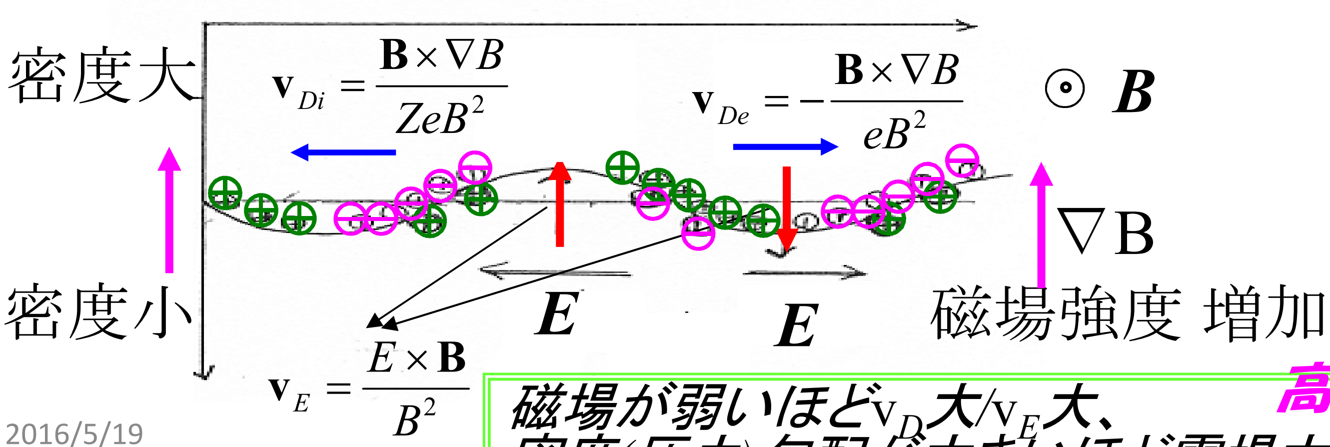
圧力駆動型MHD不安定性

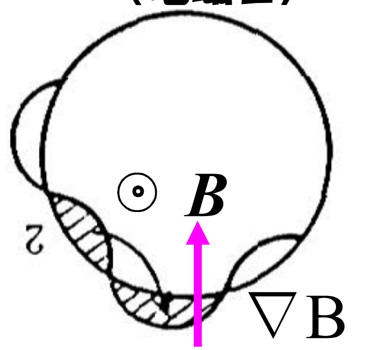
-粒子的描像-

磁場中のプラズマに圧力勾配があると、不安定性が起こる。
不安定性の起こる条件;
磁場強度が強まる方向にプラズマ圧力(密度x温度)が大きくなる

不安定性の描像
(1) 密度の揺動が発生する。
(2) **密度方向と▽B方向が一致している** **(悪い曲率)**とBx▽Bドリフトと密度勾配により電荷の分離が起こる。
(3) **ExB**ドリフトが揺動を成長させる。







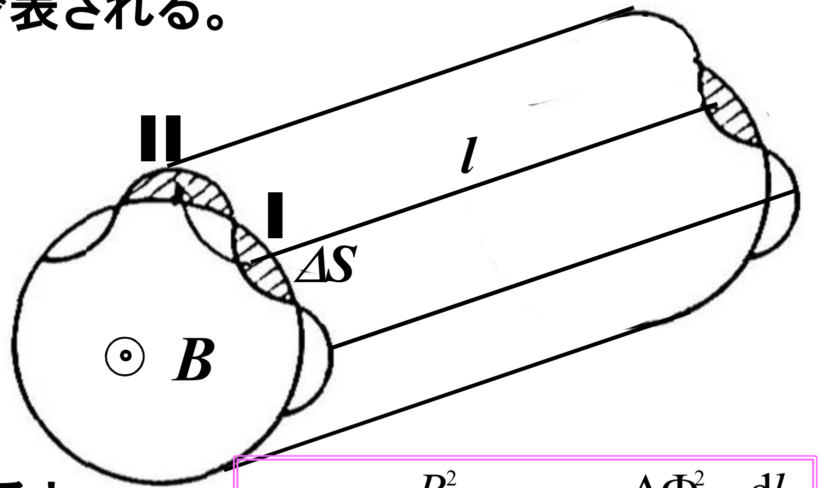
高温高密度=>不安定

磁場が弱いほどv_D大/v_E大、
密度(圧力)勾配が大きいほど電場大=> ***揺動の成長大***

圧力駆動型MHD不安定性

-流体的描像-

断面がΔS_IとΔS_{II}の2つの磁力管I, IIが入れ替わる時の安定性を、エネルギーの変化を調べることにより評価する。磁力管内のエネルギーは、磁気エネルギー 、プラズマの内部エネルギーの和で表される。



磁力管が入れ替わる時の磁気エネルギーの変化 ΔU_Mは、

$$\delta U_M = \frac{1}{2\mu_0}\left\{\left(\Delta\Phi_I^2\int_{II}\frac{\mathrm{d}l}{\Delta S}+\Delta\Phi_{II}^2\int_{I}\frac{\mathrm{d}l}{\Delta S}\right) - \left(\Delta\Phi_I^2\int_{I}\frac{\mathrm{d}l}{\Delta S}+\Delta\Phi_{II}^2\int_{II}\frac{\mathrm{d}l}{\Delta S}\right)\right\}$$

$$\boxed{\because U_M = \int\frac{B^2}{2\mu_0}\Delta S\mathrm{d}l => \frac{\Delta\Phi^2}{2\mu_0}\int\frac{\mathrm{d}l}{\Delta S}}$$

今、2本の磁力管の磁束が等しい場合を考えると、

$$\Delta U_M = 0$$

次に、内部エネルギーの変化 ΔU_pを考える。磁力管I, IIの体積をそれぞれΔV_I、ΔV_{II}、磁力管が入れ替わった後の圧力をp'_I、p'_{II}とすると

$$\delta U_p = \frac{1}{\gamma-1}\left\{\left(p'_I\Delta V_{II}+p'_{II}\Delta V_I\right)-\left(p_I\Delta V_I+p_{II}\Delta V_{II}\right)\right\}$$

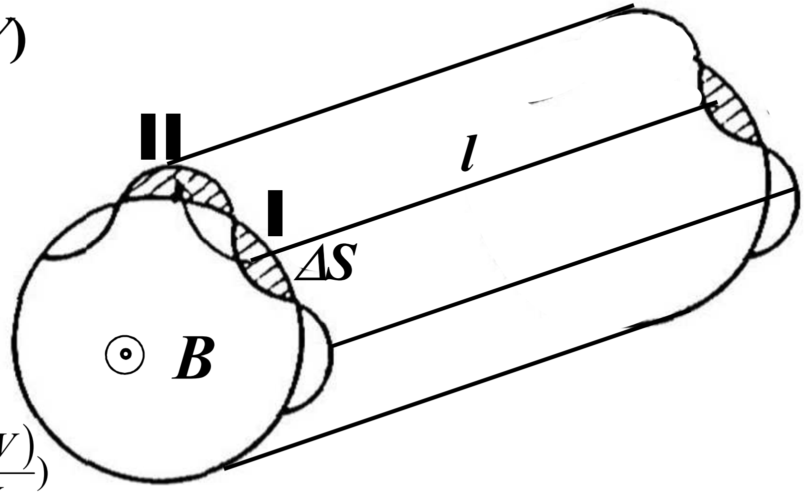
$$\boxed{\because U_p = \frac{pV}{\gamma-1}\quad(\gamma;\text{比熱比})}$$

状態方程式；$\boxed{pV^\gamma = const.}$ より、$p'_I = p_I\left(\frac{\Delta V_I}{\Delta V_{II}}\right)^\gamma$, $p'_{II} = p_{II}\left(\frac{\Delta V_{II}}{\Delta V_I}\right)^\gamma$

自由度が3のプラズマはγ=5/3

圧力駆動型MHD不安定性II

今、$p_{II} = p_I + \delta p$ ($p_I >> |\delta p|$), $\Delta V_{II} = \Delta V_I + \delta(\Delta V)$ ($\Delta V_I >> |\delta(\Delta V)|$)と書くと



$$p'_I \Delta V_{II} - p_I \Delta V_I = p_I \left(\frac{\Delta V_I}{\Delta V_I + \delta(\Delta V)} \right)^{\gamma} (\Delta V_I + \delta(\Delta V)) - p_I \Delta V_I$$

$$\sim p_I \Delta V_I \left\{ \left(1 - \gamma \delta_\Delta + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} \delta_\Delta{}^2 \right)(1 + \delta_\Delta) - 1 \right\}$$

$$\sim p_I \Delta V_I \left(-(\gamma - 1)\delta_\Delta + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} \delta_\Delta{}^2 \right) \quad (\text{但し、} \delta_\Delta \equiv \frac{\delta(\Delta V)}{\Delta V_I})$$

$$p'_{II} \Delta V_I - p_{II} \Delta V_{II} = p_{II} \left\{ \left(\frac{\Delta V_I + \delta(\Delta V)}{\Delta V_I} \right)^{\gamma} \Delta V_I - (\Delta V_I + \delta(\Delta V)) \right\} \sim (p_I + \delta p) \Delta V_I \left\{ \left(1 + \gamma \delta_\Delta + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} \delta_\Delta{}^2 \right) - (1 + \delta_\Delta) \right\}$$

$$\therefore \delta U_p \sim \frac{1}{\gamma - 1} \left\{ p_I \Delta V_I \left(-(\gamma-1)\delta_\Delta + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} \delta_\Delta{}^2 \right) + (p_I + \delta p) \Delta V_I \left((\gamma-1)\delta_\Delta + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} \delta_\Delta{}^2 \right) \right\}$$

$$\sim \frac{1}{\gamma - 1} \left\{ p_I \Delta V_I \gamma (\gamma - 1) \delta_\Delta{}^2 + \delta p \Delta V_I (\gamma - 1) \delta_\Delta \right\} \sim p_I \Delta V_I \gamma \delta_\Delta{}^2 + \delta p \Delta V_I \delta_\Delta$$

不安定の条件は、$\boxed{\Delta U_M + \Delta U_p < 0.}$ => $\delta(\Delta V)\delta p < 0$.
中心に近い圧力が高いとすると、$\delta p < 0$.
したがって、不安定の条件は、$\delta(\Delta V) > 0$.

領域II(外側)の磁場がI(内側)の磁場より小さい。

$$\delta(\Delta V) = \delta \int \Delta S \mathrm{d}l = \delta \left(\Delta \Phi \int \frac{\mathrm{d}l}{B} \right) \quad => \Delta \Phi \left(\int_{II} \frac{\mathrm{d}l}{B} - \int_{I} \frac{\mathrm{d}l}{B} \right) > 0$$

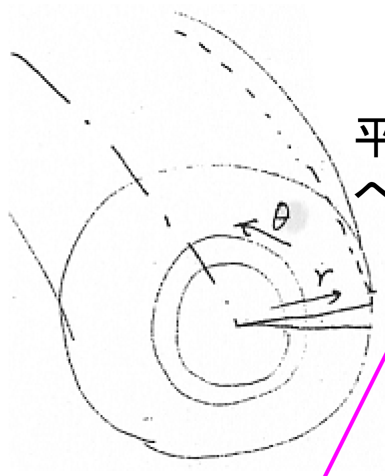
∵磁束の等しい磁束管を考えているから

環状磁場プラズマでの交換型MHD不安定特性

交換型不安定性の特徴
電荷分離によるExBドリフトが揺動を成長させる。

磁場構造が環状になると電荷分離はどうなるか?

搖動の構造と特定の関係の磁場構造を持つ磁気面のみで、電荷分離をキャンセルできずに、揺動が成長する。



平板形状へ展開

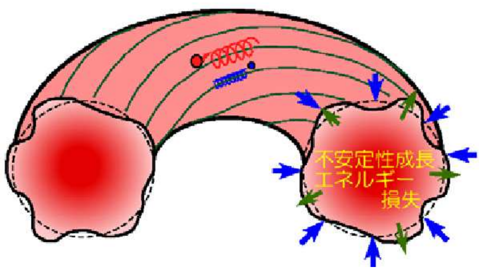
揺動のモード数と共鳴する有理面

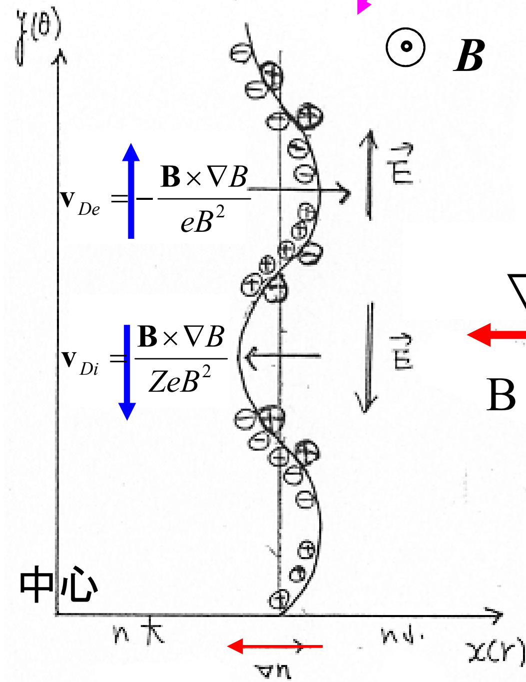
回転変換(磁場のねじれのピッチ)がn/m

=>磁力線がトロイダル方向にn周ポロイダル方向にm周回ると閉じる。

揺動のトロイダルモード(周期)数がn, ポロイダルモード数がm

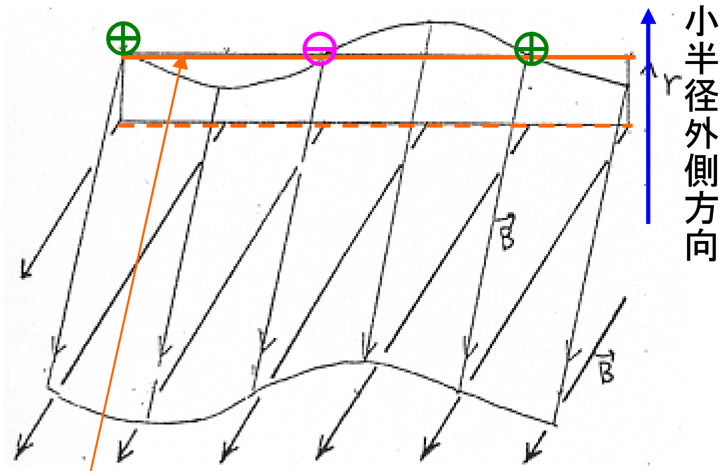
=>揺動がトロイダル方向にn周ポロイダル方向にm周進むと山谷が一致





圧力駆動型不安定性に対する「磁力線のねじれの差」の効果

磁力線のねじれに差(磁気シア)のある磁気面



有理面 $\iota=n/m$.
ι は回転変換。n, mは整数。

磁力線のねじれに差が磁気面ごとに異なる場合、何が起こるか?

不安定性(摂動)が共鳴有理面を超えて成長するためには、近接した磁気面上の磁力線の向きを不安定な磁気面と同じにする必要あり。

さもないと、近接した磁気面で発生した分離電荷は、電子が磁力線方向に動くことによりキャンセルされ、不安定性は成長出来ない。

=>

磁力線の向きの変更(磁力線を曲げる)には、エネルギーが必要

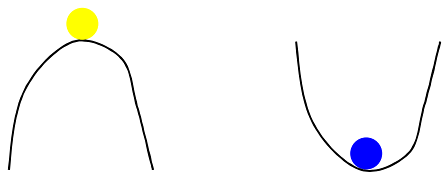
➔

磁気シアには交換型不安定性を安定化する効果がある。

MHD不安定性の原因

磁場中のプラズマが不安定になる原因は、以下の2つ.
(1) 圧力勾配 (圧力駆動型)
(2) 電流 (電流駆動型)

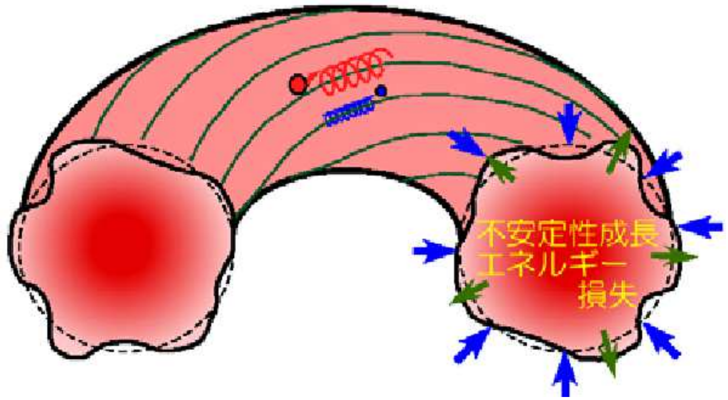
(1)はヘリオトロン(ヘリカル)方式でよく問題になり,
(2)はトカマク方式でよく問題となる.



● 平衡、不安定

● 平衡、安定

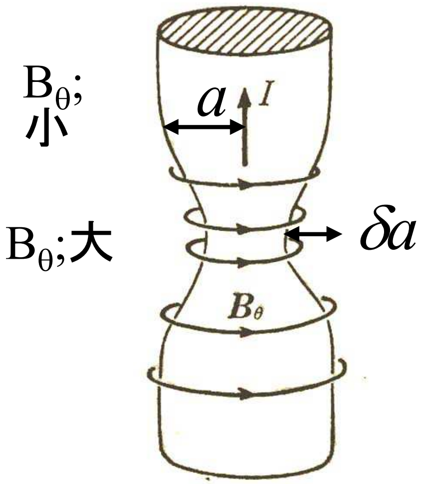
MHD安定か否か?



プラズマを揺らすとその振幅が大きくなるか? 元の位置のとどまれるか?

電流駆動型MHD不安定性　I

Advanced



ここでは，磁場は長手方向の電流で生成されている場合を考える。

プラズマの等圧面が何かの理由で縮まると電流によるそこでの磁場が強くなり，縮まった等圧面はさらに縮まってしまう.

(ソーセージ不安定性)

加速度的に状態が元の状態から変化　=>　不安定

 # 電流に沿った磁場(B_z)の効果は??

変形前(a)の磁場をB_θ, B_z、変形後($a+\delta a$)の磁場を$B_\theta+\delta B_\theta$, $B_z+\delta B_z$とすると、

磁束保存により

$$\pi a^2 B_z^{\ 2} = \pi(a+\delta a)^2 (B_z+\delta B_z)^2 \qquad \delta B_z \sim -2B_z \frac{\delta a}{a}$$

電流保存により

$$\mu_0 I_p = 2\pi a B_\theta = 2\pi(a+\delta a)(B_\theta+\delta B_\theta) \qquad \delta B_\theta \sim -B_\theta \frac{\delta a}{a}$$

変形後のプラズマ内外の磁気圧差は、外向きを正とすると、

$$\frac{(B_z+\delta B_z)^2}{2\mu_0} - \frac{(B_\theta+\delta B_\theta)^2}{2\mu_0} \sim \frac{2(B_z\delta B_z - B_\theta \delta B_\theta)}{2\mu_0}$$

$$\sim -\frac{2B_z^{\ 2} - B_\theta^{\ 2}}{\mu_0}\frac{\delta a}{a}$$

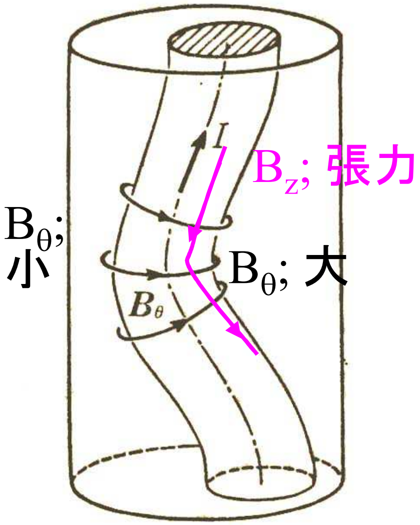
*)プラズマ内外の磁気圧差は、変形前には釣り合っていた

\# δaが内向き(負)の場合、$B_z^2 > B_\theta^2/2$の時、磁気圧差は正(外向きの力) => 安定

\# $B_z=0$なら、常に磁気圧差は負(外向きの力) => 不安定

電流に沿った磁場は、安定化に寄与

電流駆動型MHD不安定性 II

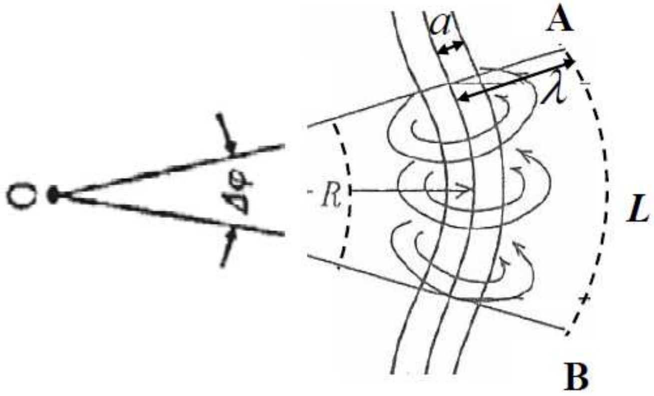


ここでは，長手方向の電流で生成されている磁場と、プラズマ中の電流方向の磁場がある場合を考える。

プラズマの等圧面が何かの理由で捩じれるとねじれの曲率が小さいほうの電流によるそこでの磁場が強くなり，等圧面のねじれはさらに大きくなってしまう(キンク不安定性).

⬇

> 加速度的に状態が元の状態から変化　=>　不安定



上図磁力線に直交する半径λのA面、B面に挟まれた長さL、半径aの曲率Rでまがったプラズマ柱を考える。

Advanced

1. 電流による磁場B_θが、平面A及びBに及ぼす磁気圧による力は曲率中心と反対向きで、

$$2\int_a^\lambda \frac{B_\theta^2}{2\mu_0}2\pi\rho d\rho \times \sin\frac{\Delta\varphi}{2} \sim \int_a^\lambda \frac{\left(\mu_0 I_p/2\pi\rho\right)^2}{2\mu_0}2\pi\rho d\rho \times \frac{L}{R}$$

$$\sim \frac{L}{R}\left(\frac{\mu_0 I_p}{2\pi a}\right)^2 \frac{a^2\pi}{\mu_0}\int_a^\lambda \frac{1}{\rho}d\rho$$

$$\sim \frac{L}{R}\frac{\pi a^2 B_{\theta a}^2}{\mu_0}\ln\frac{\lambda}{a}$$

> *)プラズマ柱と交差する部分の磁気圧は上下で釣り合っているからは、積分範囲はa~λ.

2. 電流に沿った磁場B_zの張力により、プラズマ柱に働く力は曲率中心方向で、

$$2\times\frac{\pi a^2 B_z^2}{2\mu_0}\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \sim \frac{\pi a^2 B_z^2}{2\mu_0}\Delta\varphi \sim \frac{\pi a^2 B_z^2}{2\mu_0}\frac{L}{R}$$

電流に沿った磁場は安定化に寄与

位置不安定性

垂直(鉛直方向)磁場中で、トロイダル方向に電流が流れている細いプラズマリングの安定性を考える。

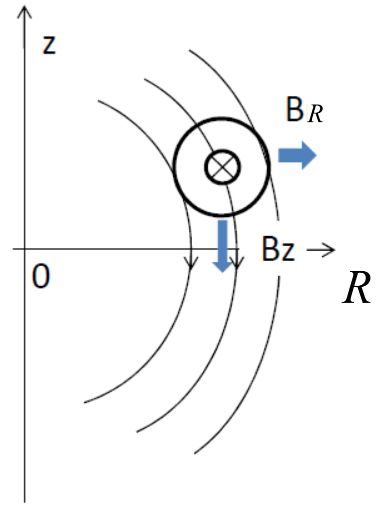
細いプラズマリングが、平衡状態から少し動くと元の位置に戻るか、否かで、安定・不安定を判定する。

***) 電流の流れた環状のプラズマがフープ力により広がらない(MHD平衡が成り立つ)ためには、垂直(鉛直方向)磁場が必要。**

垂直磁場B_zの大きさが、次式で与えられると仮定する。

$$B_Z = B_{Z0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^n \quad (\text{但し、}B_{Z0} < 0)$$

$$B_Z = B_{Z0}\left(1+\frac{(R_0-R)}{R_0}\right)^{-n} \sim B_{Z0}\left(1-n\frac{(R_0-R)}{R_0}\right) \ (\text{但し、}\left|\frac{(R_0-R)}{R_0}\right| << 1)$$



リングの平衡の位置は$r=R_0$, $z=0$とする。磁場のr成分は、

$$B_R \sim -nB_{Z0}\frac{z}{R_0} \quad (\because \nabla\times\mathbf{B}=0 \Rightarrow \frac{\partial B_R}{\partial z}=\frac{\partial B_z}{\partial R})$$

したがって、リングに働くz方向の力は、$F_z(R,z) = 2\pi R I_p B_R$

平衡の位置からz方向に微小距離Δzだけ変位した時にリングが受ける力は、

$$F_z(R_0,\Delta z) - F_z(R_0,0) = 2\pi R_0 I_p B_r(R_0,\Delta z) = -2\pi R_0 I_p n B_{z0}\frac{\Delta z}{R_0}$$

大半径外側ほど、磁場小

この力が、復元力であるためには、

$$-2\pi R_0 I_p n B_{z0}\frac{1}{R_0} < 0 \quad \Rightarrow \boxed{n > 0}$$

熱・電磁流体物理特論@ES025, Thus.10:30~

0. イントロ
（MHD研究の意義;熱核融合発電炉の開発研究での位置づけ等）

1. MHD平衡特性、安定特性の粒子的描像と流体的描像の概説

2. 速度分布関数とは

3. 流体方程式と電磁流体方程式(MHD方程式)とは

4. MHD方程式に基づくプラズマのMHD平衡特性、安定特性の評価例

5. MHD研究のトピックス等

プラズマ(荷電粒子の集団)中の現象の物理機構を理解する手法

粒子的描像

現象を代表する個々の粒子の特徴的な振る舞いに着目して、物理描像を理解。
直観的に理解しやすいが、定量的評価は困難。

流体的描像

流体の指標(重み付の平均量)の**従う式(法則)に基づき、物理描像を理解**。
抽象的な理解になり易いが、定量的評価には必須。

運動(速度)がどうなるかを調べる

エネルギーがどうなるかを調べる

電磁流体力学の基礎となる流体方程式

$$\frac{\partial n_s(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \nabla\cdot\left(n_s(\mathbf{x},t)\mathbf{V}_s(\mathbf{x},t)\right) = S_s(\mathbf{x},t)$$

粒子数の保存則
(連続の式)

$$m_s n_s\left\{\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}})\right\}\mathbf{V}_s + \nabla p_s = n_s q_s(\mathbf{E}+\mathbf{V}_s\times\mathbf{B}) + \mathbf{R}_s - m_s S_s \mathbf{V}_s$$

運動量の保存則

$$\frac{3}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\right\}p_s + \frac{5}{2}p\nabla\cdot\mathbf{V}_s = \mathbf{T}_s - \mathbf{V}_s\cdot\mathbf{R}_s + \frac{m_s\mathbf{V}_s^{\ 2}}{2}S_s$$

エネルギーの保存則

$\nabla_{\mathbf{x}} => \nabla$

$\langle\mathbf{E}\rangle => \mathbf{E}$　$\langle\mathbf{B}\rangle => \mathbf{B}$

$S_s \equiv \int_{\mathbf{v}} C_s \mathrm{d}\mathbf{v}$　粒子源

$\mathbf{R}_s \equiv \int_{\mathbf{v}} m_s \mathbf{v} C_s \mathrm{d}\mathbf{v}$　摩擦力

$\mathbf{T}_s \equiv \int_{\mathbf{v}} \frac{m_s \mathbf{v}^2}{2} C_s \mathrm{d}\mathbf{v}$　衝突によるエネルギー変化

個々の粒子の従う式(個々の粒子の視点)

=> 個々の粒子の従う式(位相空間の座標の視点)

=>粒子群が個々の初期条件によらずに従う式　**速度分布関数**

=>粒子群の「統計量(平均量)」が従う式

速度分布関数(その1)

あるj番目のプラズマ粒子の特性は、その粒子が存在する位置**x** と粒子の持つ速度**v**で規定することができる。したがって、粒子の運動は、位置**x**, 速度**v**の6次元空間(位相空間)の軌跡として、記述することができる。粒子の軌跡を(**x**, **v**)=($\mathbf{X}_j$(t), $\mathbf{V}_j$(t))とすると、$\mathbf{X}_j$, $\mathbf{V}_j$の時間発展は、次式で表される。

運動方程式 $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{X}_j}{\mathrm{d}t} = \mathbf{V}_j \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{V}_j}{\mathrm{d}t} = \dfrac{q_j}{m_j}\left(\mathbf{E} + \mathbf{V}_j \times \mathbf{B}\right) \end{cases}$$

ここで、電場**E**, 磁場**B**は時刻tでの粒子位置**x**=$\mathbf{X}_j$(t)における値であり、以下のマックスウェル方程式を用いて求められる。

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x},t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x},t)}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x},t) = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x},t)}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \frac{\sigma(\mathbf{x},t)}{\varepsilon_0}.$$

マックスウェル方程式の右辺に現れる電流密度**j**, 電荷密度σは、粒子の位置、速度と以下の式で関係づけられている。

$$\mathbf{j}(\mathbf{x},t) = \sum_j q_j \mathbf{V}_j \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{X}_j(t)\right),$$

$$\sigma(\mathbf{x},t) = \sum_j q_j \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{X}_j(t)\right).$$

デルタ関数

$$\delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{X}_j(t)\right) = \begin{cases} 1 & \text{for } \mathbf{x} = \mathbf{X}_j(t) \\ 0 & \text{for } \mathbf{x} \neq \mathbf{X}_j(t) \end{cases}$$

速度分布関数(その2)

次に、プラズマ粒子群(j=1,2,,,,N_{s0})を集団的に扱うために、粒子種sの「**存在確率**」N_s/N_{s0}を位相空間(**x**, **v**)で定義する。

$$\frac{N_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)}{N_{s0}} \equiv \frac{1}{N_{s0}}\sum_j^{N_{s0}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}_j(t))\delta(\mathbf{v}-\mathbf{V}_j(t))$$

座標(**x**, **v**)=($\mathbf{X}_j$(t), $\mathbf{V}_j$(t))に粒子が存在する確率は、$1/N_{s0}$である。

N_sを使うと粒子と場の量の関係式は、次式のように書ける。

$$\mathbf{j}(\mathbf{x},t)=\sum_s q_s\int_{\mathbf{v}} N_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\mathbf{v}d\mathbf{v}^3,\qquad \because \int_{\mathbf{v}} N_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\mathbf{v}d\mathbf{v}^3=\int_{\mathbf{v}}\sum_j^{N_{s0}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}_j(t))\delta(\mathbf{v}-\mathbf{V}_j(t))\mathbf{v}d\mathbf{v}^3$$

$$\sigma(\mathbf{x},t)=\sum_s q_s\int_{\mathbf{v}} N_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)d\mathbf{v}^3.\qquad =\sum_j^{N_{s0}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}_j(t))\mathbf{V}_j(t),$$

次に、上記で導入した存在確率が時間的にどのように発展するかを考える。
N_s(**x**, **v**, t)の時間微分をとると、

微分の定義から

$$\frac{\partial N_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)}{\partial t}=-\sum_j^{N_{s0}}\dot{\mathbf{X}}_j\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}_j(t))\delta(\mathbf{v}-\mathbf{V}_j(t))-\sum_j^{N_{s0}}\dot{\mathbf{V}}_j\cdot\nabla_{\mathbf{v}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}_j(t))\delta(\mathbf{v}-\mathbf{V}_j(t))$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}=(\partial/\partial x,\partial/\partial y,\partial/\partial z),\nabla_{\mathbf{v}}=(\partial/\partial v_x,\partial/\partial v_y,\partial/\partial v_z)$$

j番目の粒子の位置、速度の時間微分を運動方程式を用いて消去すると、

$$\frac{\partial N_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)}{\partial t}=-\sum_j^{N_{s0}}\mathbf{V}_j\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}_j(t))\delta(\mathbf{v}-\mathbf{V}_j(t))-\sum_j^{N_{s0}}\frac{q_j}{m_j}(\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B})\cdot\nabla_{\mathbf{v}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}_j(t))\delta(\mathbf{v}-\mathbf{V}_j(t))$$

速度分布関数(その3)

$$\frac{\partial N_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)}{\partial t} = -\sum_j^{N_{s0}} \mathbf{V}_j \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}_j(t))\delta(\mathbf{v}-\mathbf{V}_j(t)) - \sum_j^{N_{s0}} \frac{q_j}{m_j}(\mathbf{E}+\mathbf{V}_j(t)\times\mathbf{B})\cdot\nabla_{\mathbf{v}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}_j(t))\delta(\mathbf{v}-\mathbf{V}_j(t))$$

$\mathbf{X}_j(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}_j(t)) = \mathbf{x}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}_j(t)),\ \mathbf{V}_j(t)\delta(\mathbf{v}-\mathbf{V}_j(t)) = \mathbf{v}\delta(\mathbf{v}-\mathbf{V}_j(t))$ であることを使うと、

$$\frac{\partial N_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)}{\partial t} = -\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} \sum_j^{N_{s0}} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}_j(t))\delta(\mathbf{v}-\mathbf{V}_j(t)) - (\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\nabla_{\mathbf{v}} \sum_j^{N_{s0}} \frac{q_j}{m_j}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}_j(t))\delta(\mathbf{v}-\mathbf{V}_j(t))$$

さらに、$\dfrac{N_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)}{N_{s0}} \equiv \dfrac{1}{N_{s0}}\sum_j^{N_{s0}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}_j(t))\delta(\mathbf{v}-\mathbf{V}_j(t))$ であることを使うと、

$$\boxed{\frac{\partial N_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)}{\partial t} = -\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} N_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t) - (\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\nabla_{\mathbf{v}}\frac{q_s}{m_s}N_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)}$$

プラズマ粒子個々の情報の時間発展を、位相空間(x, v)におけるデルタ関数(スパイク的局所的なピークを持つ関数)の集合である「確率密度」N_s/N_{s0}を使って表す式

=> **Klimontovich方程式**

速度分布関数(その4)

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{X}_j}{\mathrm{d}t} = \mathbf{V}_j \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{V}_j}{\mathrm{d}t} = \dfrac{q_j}{m_j}\left(\mathbf{E} + \mathbf{V}_j \times \mathbf{B}\right) \end{cases}$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x},t) = \sum_j q_j \mathbf{V}_j \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{X}_j(t)\right),$$

$$\sigma(\mathbf{x},t) = \sum_j q_j \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{X}_j(t)\right).$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x},t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x},t)}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x},t) = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x},t)}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \frac{\sigma(\mathbf{x},t)}{\varepsilon_0}.$$

ある時刻にj番目の粒子は、位相空間で、($\mathbf{X}_j$(t), $\mathbf{V}_j$(t))の座標に居る。

個々の粒子の視点

Lagrange表記

ある時刻に位相空間の($\mathbf{x}$,$\mathbf{v}$)の座標に居る粒子の存在確率は、N_s/N_{s0}。($\mathbf{X}_j$(t), $\mathbf{V}_j$(t))の座標に居る$1/N_{s0}$。

等価

$$\frac{\partial N_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} N_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t) - (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \frac{q_s}{m_s} N_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x},t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x},t)}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x},t) = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x},t)}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \frac{\sigma(\mathbf{x},t)}{\varepsilon_0}.$$

位相空間の座標の視点

Eular表記

$$\mathbf{j}(\mathbf{x},t) = \sum_s q_s \int_{\mathbf{v}} N_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\mathbf{v}\mathrm{d}\mathbf{v}^3,$$

$$\sigma(\mathbf{x},t) = \sum_s q_s \int_{\mathbf{v}} N_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\mathrm{d}\mathbf{v}^3.$$

$$N_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = \sum_j^{N_{s0}} \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{X}_j(t)\right)\delta\left(\mathbf{v} - \mathbf{V}_j(t)\right)$$

速度分布関数(その5)

Klimontovich方程式をマックスウェル方程式と矛盾なく解くことは、N_{s0}個の粒子のすべての軌道の時間発展を運動方程式とマックスウェル方程式に従い、矛盾なく解くことと等価。

=> **初期値($X_j(t=0)$, $V_j(t=0)$, $j=1,2,,,,N_{s0}$)が異なれば、確率密度N_s/N_{s0}もすべて異なる。**

しかしながら、我々が興味があるのは、初期値によって変わる個々の粒子の位置や速度の時間発展ではなく、**位相空間の座標(x, v)を中心とした微小要素dx^3dv^3中に存在する粒子数のような集団的な統計量**である。

そこで、$6N_{s0}$個の初期値に対して、**統計平均**を行う。つまり、**初期密度や初期温度のような統計量が同じになる条件のもとで、ランダムに選んだ $6N_{s0}$個の初期値を持つ粒子群の軌跡の時間発展の評価を複数回試行**し、得られた結果を試行回数で平均する操作を平均値が収束するまで行う。

すると、**デルタ関数(局所的なピークを持つ関数)の集合である「確率密度」N_s/N_{s0}の統計平均量**$<N_s/N_{s0}>$は、**位相空間(x, v)で局所的なピークを持たないスムーズな関数**となる。

速度分布関数(その6)

局所的なピークを持つ関数である「存在確率」N_s/N_{s0}を**空間的に平均化されたなめらかな部分f_s**と**残りの部分をδn_s**に分けて、以下のように表示する。

$$\boxed{N_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)/N_{s0} = f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t) + \delta n_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)} \qquad \text{但し、} f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t) \equiv \langle N_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\rangle / N_{s0}$$

ここで、< >は統計平均量を示す。**$f_s\Delta\mathbf{x}\Delta\mathbf{v}$**は、物理的には位相空間$(\mathbf{x}, \mathbf{v})$という座標を中心とした**微小位相空間要素$\Delta\mathbf{x}\Delta\mathbf{v}$内に存在する粒子数**に対応し、**$f_s$を速度分布関数**と呼ぶ。

粒子の存在確率の統計平均量と局所的振る舞いに起因するマクスウェル分布の物理量は、

$$\mathbf{j} = \sum_s q_s \int_{\mathbf{v}} N_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\mathbf{v}d\mathbf{v} = \sum_s q_s \left(\overbrace{\int_{\mathbf{v}} f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\mathbf{v}d\mathbf{v}}^{\langle \mathbf{j} \rangle} + \overbrace{N_{s0}\int_{\mathbf{v}} \delta n_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\mathbf{v}d\mathbf{v}}^{\delta \mathbf{j}} \right)$$

$$\sigma = \sum_s q_s \int_{\mathbf{v}} N_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)d\mathbf{v} = \sum_s q_s \left(\overbrace{\int_{\mathbf{v}} f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)d\mathbf{v}}^{\langle \sigma \rangle} + \overbrace{N_{s0}\int_{\mathbf{v}} \delta n_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)d\mathbf{v}}^{\delta \sigma} \right)$$

したがって、他のマクスウェル方程式の物理量も、$\langle\mathbf{j}\rangle$, $\langle\sigma\rangle$に起因する量$\langle\mathbf{B}\rangle$, $\langle\mathbf{E}\rangle$と、$\delta\mathbf{j}$, $\delta\sigma$に起因する量$d\mathbf{B}$, $d\mathbf{E}$に分けることができる。ここで、$\langle\mathbf{B}\rangle$, $\langle\mathbf{E}\rangle$、$\delta\mathbf{B}$, $\delta\mathbf{E}$は以下の式を満たす。

$$\boxed{\nabla\cdot\langle\mathbf{E}\rangle = \frac{\langle\sigma\rangle}{\varepsilon_0}, \nabla\times\langle\mathbf{B}\rangle = \mu_0\langle\mathbf{j}\rangle + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\langle\mathbf{E}\rangle}{\partial t} \qquad \nabla\cdot\delta\mathbf{E} = \frac{\delta\sigma}{\varepsilon_0}, \nabla\times\delta\mathbf{B} = \mu_0\delta\mathbf{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\delta\mathbf{E}}{\partial t}}$$

速度分布関数(その7)

f_sとδn_sに<**B**>, <**E**>、δ**B**, δ**E**を使って、**Klimontvichの式**を書き直し、**統計平均をとる**と、以下の**プラズマ運動論方程式(または、Boltzman方程式)**が得られる。

$$\boxed{\frac{\partial f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)+\frac{q_s}{m_s}\left(\langle\mathbf{E}\rangle+\mathbf{v}\times\langle\mathbf{B}\rangle\right)\cdot\nabla_{\mathbf{v}}f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)=C_s}$$

但し、$C_s\equiv-\dfrac{q_s}{m_s}\left\langle\left(\delta\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\delta\mathbf{B}\right)\cdot\nabla_{\mathbf{v}}\delta n_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\right\rangle$

C_sは、近接した荷電粒子間の大角度クーロン衝突や、考えている時間スケールより短い時間に起きる多重小角度クーロン衝突のような、**荷電粒子が作る電磁場を荷電粒子集団が作る平均的な電磁場で表すことができない効果**が、速度分布関数(スムーズな関数)に及ぼす影響を示しており、「衝突」項と呼ばれる。

プラズマ運動論方程式において、上記のような「衝突」は、位相空間上での粒子の生成・消滅に対応する。

例えば、**同じ質量の粒子が剛体的に正面衝突すると、瞬間的に粒子の向きは、反転**するため、**速度空間では、ある座標にいる粒子が突然消えて別の座標に現れるように見える**。(**位置空間では、粒子の生成・消滅は起こらず、粒子の位置座標は連続的に変化**するという、違いがあることに注意。)

速度分布関数(その8)

「衝突」項C_sの具体的表式には、多様な統計的近似が提案され、対象とする物理課題に応じて、近似表式が異なるので、ここでは、これ以上詳しく述べない。

なお、**「衝突」項C_sがゼロでも、荷電粒子間の衝突は、クーロン力を通じた遠距離力**なので、**近接していない粒子同士の「衝突」の効果は、プラズマ運動論方程式に含まれている**ことに注意。(C_s=0の方程式を特に、Vlasov方程式と呼ぶ。)

熱･電磁流体物理特論@ES025, Thus.10:30~

0. イントロ

（MHD研究の意義;熱核融合発電炉の開発研究での位置づけ等）

1. MHD平衡特性、安定特性の粒子的描像と流体的描像の概説

2. 速度分布関数とは

3. **流体方程式**と電磁流体方程式(MHD方程式)とは

4. MHD方程式に基づくプラズマのMHD平衡特性、安定特性の評価例

5. MHD研究のトピックス等

流体方程式(その1)

プラズマ物理における多くの問題を厳密にとらえるためには、プラズマ運動論方程式(または、Boltzman方程式)を考える必要があるが、プラズマの流体的性質に特に興味がある場合は、プラズマの密度や流速、圧力などの「平均」量の従う法則(式)を導出し、その性質を調べることが有効である。

速度分布関数は、(**x**, **v**, t)の関数であるので、平均量として速度空間における速度のn乗(速度のn次のモーメント)の平均を考える。

0次のモーメント; $\int_{\mathbf{v}} f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\mathbf{v}^0 \mathrm{d}\mathbf{v} \Rightarrow n_s(\mathbf{x},t)$;密度

1次のモーメント; $\frac{1}{n_s}\int_{\mathbf{v}} f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\mathbf{v}^1 \mathrm{d}\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{V}_s(\mathbf{x},t)$;流速

2次のモーメント; $\frac{1}{n_s}\int_{\mathbf{v}} f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\frac{m_s}{2}\mathbf{v}^2 \mathrm{d}\mathbf{v} \Rightarrow$;平均運動エネルギー

3次のモーメント; $\frac{1}{n_s}\int_{\mathbf{v}} f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\frac{m_s}{2}\mathbf{v}^2\mathbf{v} \mathrm{d}\mathbf{v} \Rightarrow$;平均熱流速

4次のモーメント; $\frac{1}{n_s}\int_{\mathbf{v}} f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\frac{m_s}{2}\mathbf{v}^4 \mathrm{d}\mathbf{v} \Rightarrow$;???

流体方程式(その1)

プラズマ運動論方程式は、$\nabla_{\mathbf{x}}$, $\nabla_{\mathbf{v}}$を以下のように書き直せる。

$$\boxed{\frac{\partial f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{3}\mathbf{v}_\alpha\frac{\partial f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)}{\partial \mathbf{x}_\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{3}\mathbf{F}_\alpha\frac{\partial f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)}{\partial \mathbf{v}_\alpha}=C_s}$$

ただし、$\mathbf{F}\equiv\frac{q_s}{m_s}\left(\langle\mathbf{E}\rangle+\mathbf{v}\times\langle\mathbf{B}\rangle\right)$

この両辺に、速度の関数Q(v)をかけて、速度空間で積分すると、左辺第1項から第3項まで以下のように変形できる。

$$\int_{\mathbf{v}}Q(\mathbf{v})\frac{\partial f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)}{\partial t}\mathrm{d}\mathbf{v}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbf{v}}Q(\mathbf{v})f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\mathrm{d}\mathbf{v}\boxed{=\frac{\partial}{\partial t}\left(n_s\|Q\|_s\right)}$$

$$\int_{\mathbf{v}}Q(\mathbf{v})\mathbf{v}_\alpha\frac{\partial f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)}{\partial \mathbf{x}_\alpha}\mathrm{d}\mathbf{v}=\int_{\mathbf{v}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_\alpha}\left(Q(\mathbf{v})\mathbf{v}_\alpha f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\right)\mathrm{d}\mathbf{v}=\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_\alpha}\int_{\mathbf{v}}Q(\mathbf{v})\mathbf{v}_\alpha f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\mathrm{d}\mathbf{v}\boxed{=\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_\alpha}\left(n_s\|Q\mathbf{v}_\alpha\|_s\right)}$$

$$\int_{\mathbf{v}}Q(\mathbf{v})\mathbf{F}_\alpha\frac{\partial f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)}{\partial \mathbf{v}_\alpha}\mathrm{d}\mathbf{v}=\int_{\mathbf{v}}\mathrm{d}\mathbf{v}_\beta\mathrm{d}\mathbf{v}_\gamma\left[Q(\mathbf{v})\mathbf{F}_\alpha f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\right]_{\mathbf{v}_\alpha=-\infty}^{\mathbf{v}_\alpha=+\infty}-\int_{\mathbf{v}}f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha}\left(Q(\mathbf{v})\mathbf{F}_\alpha\right)\mathrm{d}\mathbf{v}$$

$\mathbf{F}\equiv\frac{q_s}{m_s}\left(\langle\mathbf{E}\rangle+\mathbf{v}\times\langle\mathbf{B}\rangle\right)$より、

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha}(\mathbf{F}_\alpha)\propto\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha}\left(\mathbf{v}_\beta\mathbf{B}_\gamma-\mathbf{v}_\gamma\mathbf{B}_\beta\right)=0\qquad\therefore\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha}\left(Q(\mathbf{v})\mathbf{F}_\alpha\right)=\mathbf{F}_\alpha\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha}\left(Q(\mathbf{v})\right)$$

$$\int_{\mathbf{v}}Q(\mathbf{v})\mathbf{F}_\alpha\frac{\partial f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)}{\partial \mathbf{v}_\alpha}\mathrm{d}\mathbf{v}=-\int_{\mathbf{v}}f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\mathbf{F}_\alpha\frac{\partial Q(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}_\alpha}\mathrm{d}\mathbf{v}\boxed{=-n_s\left\|\mathbf{F}_\alpha\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{v}_\alpha}\right\|_s}$$

流体方程式(その2)

以上をまとめると、

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(n_s\|Q\|_s\right)+\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\left(n_s\|Q\mathbf{v}\|_s\right)-n_s\|\mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{v}}Q\|_s=\int_{\mathbf{v}}QC_s d\mathbf{v}}$$

ただし、$\mathbf{F}\equiv\frac{q_s}{m_s}\left(\langle\mathbf{E}\rangle+\mathbf{v}\times\langle\mathbf{B}\rangle\right)$

1. Q(**v**)=$\mathbf{v}^0$の場合は、

$$\|Q\|_s=\frac{1}{n_s}\int_{\mathbf{v}}f_s d\mathbf{v}=\frac{n_s}{n_s}=\boxed{1}\qquad \|Q\mathbf{v}\|_s=\frac{1}{n_s}\int_{\mathbf{v}}f_s\mathbf{v}d\mathbf{v}\equiv\frac{n_s\mathbf{V}_s}{n_s}=\boxed{\mathbf{V}_s}$$

$$\|\mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{v}}Q\|_s=\int_{\mathbf{v}}f_s\mathbf{F}\cdot 0 d\mathbf{v}=\boxed{0}\qquad \int_{\mathbf{v}}QC_s d\mathbf{v}=\int_{\mathbf{v}}C_s d\mathbf{v}\equiv\boxed{S_s}$$

まとめると、

$$\boxed{\frac{\partial n_s(\mathbf{x},t)}{\partial t}+\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\left(n_s(\mathbf{x},t)\mathbf{V}_s(\mathbf{x},t)\right)=S_s}$$

上式は、粒子の保存則(連続の式)で、粒子の生成・消滅がなければ、右辺は0となる。

イオン化等で≠0

流体方程式(その3)

2. $Q(\mathbf{v})=m_s\mathbf{v}^1$の場合は、

$$\|Q\|_s = m_s\|\mathbf{v}\|_s = \frac{m_s}{n_s}\int_{\mathbf{v}} f_s\mathbf{v}d\mathbf{v} \equiv \frac{m_s n_s \mathbf{V}_s}{n_s} = \boxed{m_s\mathbf{V}_s}$$

$$\|Q\mathbf{v}\|_s = m_s\|\mathbf{v}\mathbf{v}\|_s = \frac{m_s}{n_s}\int_{\mathbf{v}} f_s\mathbf{v}\mathbf{v}d\mathbf{v}$$

ここで、$\mathbf{v}\equiv\mathbf{V}_s+\delta\mathbf{v}$と書く。　　ただし、$\mathbf{V}_s=\dfrac{1}{n_s}\|\mathbf{v}\|_s$

$$n_s\|\mathbf{v}\mathbf{v}\|_s = \int_{\mathbf{v}} f_s\mathbf{V}_s\mathbf{V}_s d\mathbf{v} + \int_{\mathbf{v}} f_s\mathbf{V}_s\delta\mathbf{v}d\mathbf{v} + \int_{\mathbf{v}} f_s\delta\mathbf{v}\mathbf{V}_s d\mathbf{v} + \int_{\mathbf{v}} f_s\delta\mathbf{v}\delta\mathbf{v}d\mathbf{v}$$

$$\boxed{= \mathbf{V}_s\mathbf{V}_s\int_{\mathbf{v}} f_s d\mathbf{v} + \int_{\mathbf{v}} f_s\delta\mathbf{v}\delta\mathbf{v}d\mathbf{v}}$$

$\because$ 定義より、$\int_{\mathbf{v}} f_s(\mathbf{V}_s+\delta\mathbf{v})d\mathbf{v} = \int_{\mathbf{v}} f_s\mathbf{V}_s d\mathbf{v}$ $\therefore$ 等方の場合、$\int_{\mathbf{v}} f_s\delta\mathbf{v}d\mathbf{v}=0$

$m_s\int_{\mathbf{v}} f_s\delta\mathbf{v}\delta\mathbf{v}d\mathbf{v}$は、平均速度からのずれのランダムな方向の運動エネルギーの総和であり、圧力テンソル$\vec{\mathbf{P}}$として表される。

$m_s f_s\delta\mathbf{v}\delta\mathbf{v}d\mathbf{v}$ は、成分で書き下してみると $(m_s\delta\mathbf{v}_\beta f_s d\mathbf{v})\delta\mathbf{v}_\alpha$と書くことができ、これは、速度がv~v+dvの範囲にある粒子の持つβ方向の熱運動の運動量 $m_s\delta\mathbf{v}_\beta f_s d\mathbf{v}$ が、単位時間当たりα方向に変換される割合である。**α≠βの時は、α面に垂直な軸に作用するところのβ軸に沿う粒子運動により生じたズリ応力**で、**α＝βの時は、圧力**であることに注意。

流体方程式(その4)

圧力が等方な場合は、 $\boxed{\overleftrightarrow{\mathbf{P}} = mnv_{th}{}^2\mathbf{I} = p\mathbf{I}}$ と書ける。

$$\left\| \mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{v}} Q \right\|_s = \left\| \mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{v}}(m_s\mathbf{v}) \right\|_s = m_s \sum_{\beta=1}^{3} \left\| \mathbf{F}_\beta \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\beta}\mathbf{v}_\alpha \right\|_s = m_s \left\| \mathbf{F}_\alpha \right\|_s$$

$$\left\| \langle\mathbf{E}\rangle \right\|_s = \langle\mathbf{E}\rangle \|1\|_s = \langle\mathbf{E}\rangle \qquad \left\| \mathbf{v}\times\langle\mathbf{B}\rangle \right\|_s = -\langle\mathbf{B}\rangle\times\|\mathbf{v}\|_s = -\langle\mathbf{B}\rangle\times\mathbf{V}_s$$

ただし、$\mathbf{F} \equiv \frac{q_s}{m_s}\left(\langle\mathbf{E}\rangle + \mathbf{v}\times\langle\mathbf{B}\rangle\right)$

$$\left\| \mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{v}}(m_s\mathbf{v}) \right\|_s = \boxed{q_s\left(\langle\mathbf{E}\rangle + \mathbf{V}_s\times\langle\mathbf{B}\rangle\right)} \qquad \boxed{\mathbf{R}_s} \equiv \int_{\mathbf{v}} m_s \mathbf{v} C_s \mathrm{d}\mathbf{v}$$

まとめると、

$$\boxed{m_s \frac{\partial(n_s\mathbf{V}_s)}{\partial t} + m_s \nabla_{\mathbf{x}}\cdot(n_s\mathbf{V}_s\mathbf{V}_s) + \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{P}} = n_s q_s\left(\langle\mathbf{E}\rangle + \mathbf{V}_s\times\langle\mathbf{B}\rangle\right) + \mathbf{R}_s}$$

更に、 $\frac{\partial n_s(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\left(n_s(\mathbf{x},t)\mathbf{V}_s(\mathbf{x},t)\right) = S_s$

と、 $\nabla_{\mathbf{x}}\cdot(n_s\mathbf{V}_s\mathbf{V}_s) = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_\alpha}\left(n_s\mathbf{V}_{s\alpha}\mathbf{V}_{s\beta}\right) = n_s\sum_{\alpha=1}^{3}\mathbf{V}_{s\alpha}\frac{\partial \mathbf{V}_{s\beta}}{\partial \mathbf{x}_\alpha} + \mathbf{V}_{s\beta}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_\alpha}\left(n_s\mathbf{V}_{s\alpha}\right) = n_s(\mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{V}_s + \mathbf{V}_s\nabla_{\mathbf{x}}\cdot(n_s\mathbf{V}_s)$

に注意すると、 $(\text{左辺}) = m_s n_s \frac{\partial \mathbf{V}_s}{\partial t} + m_s\mathbf{V}_s\frac{\partial n_s}{\partial t} + m_s\left(\mathbf{V}_s\nabla_{\mathbf{x}}\cdot(n_s\mathbf{V}_s)n_s + n_s(\mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{V}_s\right) + \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{P}}$

$$= m_s n_s \frac{\partial \mathbf{V}_s}{\partial t} + m_s(\mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{V}_s + m_s\mathbf{V}_s S_s + \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{P}}$$

$$\boxed{m_s n_s \underbrace{\left\{\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}})\right\}}_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}\mathbf{V}_s + \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{P}} = n_s q_s\left(\langle\mathbf{E}\rangle + \mathbf{V}_s\times\langle\mathbf{B}\rangle\right) + \mathbf{R}_s - m_s S_s\mathbf{V}_s}$$

流体方程式(その5)

3. $Q(\mathbf{v})=m_s\mathbf{v}^2/2$の場合は、

$$\|Q\|_s=\frac{m_s}{2}\|\mathbf{v}^2\|_s=\frac{m_s}{2n_s}\int_{\mathbf{v}}f_s\left(\mathbf{V}_s^{\ 2}+\delta\mathbf{v}^2\right)d\mathbf{v}=\boxed{\frac{m_s\mathbf{V}_s^{\ 2}}{2}+\frac{3p}{2n_s}}$$

$\because$ 等方の場合、

$$\int_{\mathbf{v}}f_s\frac{m\delta\mathbf{v}^2}{2}d\mathbf{v}\equiv\frac{3}{2}p$$

$$\|Q\mathbf{v}\|_s=\frac{m_s}{2}\|\mathbf{v}^2\mathbf{v}\|_s=\frac{m_s}{2}\left\|\left(\mathbf{V}_s^{\ 2}+2\mathbf{V}_s\cdot\delta\mathbf{v}+\delta\mathbf{v}^2\right)\left(\mathbf{V}_s+\delta\mathbf{v}\right)\right\|_s$$

$$=\frac{m_s}{2}\left\|\mathbf{V}_s^{\ 2}\mathbf{V}_s+2(\mathbf{V}_s\cdot\delta\mathbf{v})\mathbf{V}_s+\delta\mathbf{v}^2\mathbf{V}_s+\mathbf{V}_s^{\ 2}\delta\mathbf{v}+2(\mathbf{V}_s\cdot\delta\mathbf{v})\delta\mathbf{v}+\delta\mathbf{v}^2\delta\mathbf{v}\right\|_s$$

$$=\frac{m_s}{2}\left(\|\mathbf{V}_s^{\ 2}\mathbf{V}_s\|_s+\|\delta\mathbf{v}^2\mathbf{V}_s\|_s+\|2(\mathbf{V}_s\cdot\delta\mathbf{v})\delta\mathbf{v}\|_s\right)=\frac{m_s}{2}\left(\mathbf{V}_s^{\ 2}\mathbf{V}_s+\mathbf{V}_s\|\delta\mathbf{v}^2\|_s+\|2(\mathbf{V}_s\cdot\delta\mathbf{v})\delta\mathbf{v}\|_s\right)$$

$$\frac{m_s}{2}\|\delta\mathbf{v}^2\|_s=\frac{m_s}{2n_s}\int_{\mathbf{v}}f_s\delta\mathbf{v}^2d\mathbf{v}=\frac{3p}{2n_s}$$

$\because\ \alpha=\beta$の時のみ、$\int_{\mathbf{v}}f_s\frac{m\delta\mathbf{v}_\alpha\delta\mathbf{v}_\beta}{2}d\mathbf{v}\neq 0$

$$\frac{m_s}{2}\|2(\mathbf{V}_s\cdot\delta\mathbf{v})\delta\mathbf{v}\|_s=\frac{m_s}{n_s}\int_{\mathbf{v}}\sum_{\alpha=1}^{3}(\mathbf{V}_{s\alpha}\delta\mathbf{v}_\alpha)\delta\mathbf{v}_\beta\mathbf{e}_\beta d\mathbf{v}=\frac{m_s}{n_s}\int_{\mathbf{v}}\sum_{\alpha=1}^{3}\delta\mathbf{v}_\alpha^{\ 2}\mathbf{V}_{s\alpha}\mathbf{e}_\alpha d\mathbf{v}$$

等方の場合、$\frac{m_s}{n_s}\int_{\mathbf{v}}\sum_{\alpha=1}^{3}\delta\mathbf{v}_\alpha^{\ 2}\mathbf{V}_{s\alpha}\mathbf{e}_\alpha d\mathbf{v}$

$$=\frac{m_s}{n_s}\mathbf{V}_s\int_{\mathbf{v}}\delta\mathbf{v}_\alpha^{\ 2}d\mathbf{v}=\frac{m_s}{n_s}p\mathbf{V}_s$$

$$\therefore\|Q\mathbf{v}\|_s=\boxed{\frac{m_s}{2}\mathbf{V}_s^{\ 2}\mathbf{V}_s+\frac{5m_s}{2n_s}p\mathbf{V}_s}$$

$$\|\mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{v}}Q\|_s=\frac{m_s}{2n_s}\int_{\mathbf{v}}f_s\mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v}^2d\mathbf{v}=\frac{q_s}{2n_s}\left(\int_{\mathbf{v}}f_s\mathbf{E}\cdot\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v}^2d\mathbf{v}+\int_{\mathbf{v}}f_s\mathbf{v}\times\mathbf{B}\cdot\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v}^2d\mathbf{v}\right)$$

$$\because\int_{\mathbf{v}}q_sf_s\mathbf{v}d\mathbf{v}\equiv\mathbf{j}_s$$

$$\int_{\mathbf{v}}f_s\mathbf{E}\cdot\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v}^2d\mathbf{v}=\int_{\mathbf{v}}f_s\sum_{\alpha=1}^{3}\mathbf{E}_\alpha\frac{\partial\mathbf{v}^2}{\partial\mathbf{v}_\alpha}d\mathbf{v}=\int_{\mathbf{v}}f_s\sum_{\alpha=1}^{3}2\mathbf{E}_\alpha\mathbf{v}_\alpha d\mathbf{v}=2\mathbf{E}\cdot\int_{\mathbf{v}}f_s\mathbf{v}d\mathbf{v}=\frac{2}{q_s}\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}_s$$

$$\int_{\mathbf{v}}f_s\mathbf{v}\times\mathbf{B}\cdot\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v}^2d\mathbf{v}=\int_{\mathbf{v}}f_s\sum_{\alpha=1}^{3}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})_\alpha\frac{\partial\mathbf{v}^2}{\partial\mathbf{v}_\alpha}d\mathbf{v}=\sum_{\alpha\neq\beta\neq\gamma}^{1\sim3}\int_{\mathbf{v}}f_s\left(\mathbf{v}_\alpha\mathbf{B}_\beta-\mathbf{v}_\beta\mathbf{B}_\alpha\right)\mathbf{v}_\gamma d\mathbf{v}=0$$

$$\|\mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{v}}Q\|_s=\frac{m_s}{2n_s}\int_{\mathbf{v}}f_s\mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v}^2d\mathbf{v}=\boxed{\frac{1}{n_s}\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}}$$

流体方程式(その6)

まとめると、

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{m_s n_s \mathbf{V}_s^{\,2}}{2}+\frac{3}{2}p_s\right)+\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\left(\frac{m_s n_s \mathbf{V}_s^{\,2}}{2}\mathbf{V}_s+\frac{5}{2}p_s\mathbf{V}_s\right)=\cancel{\langle\mathbf{E}\rangle\cdot\mathbf{j}_s}+\mathbf{T}_s}\qquad \mathbf{T}_s\equiv\int_{\mathbf{v}}\frac{m_s\mathbf{v}^2}{2}C_s d\mathbf{v}$$

更に、

$$(左辺)=m_s n_s\mathbf{V}_s\cdot\frac{\partial\mathbf{V}_s}{\partial t}+\frac{m_s\mathbf{V}_s^{\,2}}{2}\frac{\partial n_s}{\partial t}+\frac{3}{2}\frac{\partial p_s}{\partial t}+\frac{m_s\mathbf{V}_s^{\,2}}{2}\nabla_{\mathbf{x}}\cdot(n_s\mathbf{V}_s)+\frac{m_s n_s}{2}\mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{V}_s^{\,2}+\frac{5}{2}\mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}}p_s+\frac{5}{2}p\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{V}_s$$

$$(左辺)=m_s n_s\mathbf{V}_s\cdot\frac{\partial\mathbf{V}_s}{\partial t}+\frac{m_s n_s}{2}\mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{V}_s^{\,2}\qquad => \boxed{-\mathbf{V}_s\cdot\nabla p_s+\cancel{\mathbf{j}_s\cdot(\mathbf{E})}+\mathbf{V}_s\cdot\mathbf{R}_s-m_s S_s\mathbf{V}_s^{\,2}}$$

配布#18の式

$$+\frac{m_s\mathbf{V}_s^{\,2}}{2}\frac{\partial n_s}{\partial t}+\frac{m_s\mathbf{V}_s^{\,2}}{2}\nabla_{\mathbf{x}}\cdot(n_s\mathbf{V}_s)\qquad \boxed{=>\frac{m_s\mathbf{V}_s^{\,2}}{2}S_s}$$

配布#13の式の$m_s V_s^2/2$・

$$+\boxed{\frac{3}{2}\frac{\partial p_s}{\partial t}+\frac{5}{2}\mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}}p_s+\frac{5}{2}p\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{V}_s}$$

$$=>\ \frac{3}{2}\frac{\partial p_s}{\partial t}+\frac{5}{2}\mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}}p_s+\frac{5}{2}p\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{V}_s-\mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}}p_s+\mathbf{V}_s\cdot\mathbf{R}_s-m_s S_s\mathbf{V}_s^{\,2}+\frac{1}{2}m_s S_s\mathbf{V}_s^{\,2}=\mathbf{T}_s$$

$$\boxed{\frac{3}{2}\underbrace{\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\right\}}_{d/dt}p_s+\frac{5}{2}p\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{V}_s=\mathbf{T}_s-\mathbf{V}_s\cdot\mathbf{R}_s+\frac{m_s\mathbf{V}_s^{\,2}}{2}S_s}$$

衝突項が無視できる場合、$\frac{dn_s}{dt}+n_s\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{V}_s=0$ に注目すると

$$\frac{3}{2}\frac{dp_s}{dt}-\frac{5p_s}{2n_s}\frac{dn_s}{dt}=0\qquad \boxed{=>p_s n_s^{-5/3}=const}$$

自由度3の粒子に対する断熱圧縮の式

流体方程式(その6’)

$$\mathbf{V}_s\cdot\left\{m_s n_s\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\left(\mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\right)\right\}\mathbf{V}_s+\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{P}}=n_s q_s\left(\langle\mathbf{E}\rangle+\mathbf{V}_s\times\langle\mathbf{B}\rangle\right)+\mathbf{R}_s-m_s S_s\mathbf{V}_s\right\}$$ を考える。

配布#15の式の$\mathbf{V}_s$・

$$(\text{左辺})=m_s n_s\mathbf{V}_s\cdot\frac{\partial\mathbf{V}_s}{\partial t}+m_s n_s\mathbf{V}_s\cdot\left(\mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\right)\mathbf{V}_s+\mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}}p_s$$

$$(\text{右辺})=q_s n_s\mathbf{V}_s\cdot\langle\mathbf{E}\rangle+\mathbf{V}_s\cdot\mathbf{R}_s-m_s S_s\mathbf{V}_s{}^2$$

$$m_s n_s\mathbf{V}_s\cdot\left(\mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\right)\mathbf{V}_s=m_s n_s\mathbf{V}_s\cdot\sum_{\beta=1}^{3}\left(\sum_{\alpha=1}^{3}\mathbf{V}_{s\alpha}\frac{\partial\mathbf{V}_{s\beta}}{\partial\mathbf{x}_\alpha}\right)\mathbf{e}_\beta$$
$$=m_s n_s\sum_{\beta=1}^{3}\mathbf{V}_{s\beta}\left(\sum_{\alpha=1}^{3}\mathbf{V}_{s\alpha}\frac{\partial\mathbf{V}_{s\beta}}{\partial\mathbf{x}_\alpha}\right)=m_s n_s\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\mathbf{V}_{s\beta}\mathbf{V}_{s\alpha}\frac{\partial\mathbf{V}_{s\beta}}{\partial\mathbf{x}_\alpha}$$

$$\mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{V}_s{}^2=\sum_{\alpha=1}^{3}\mathbf{V}_s\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}_\alpha}\left(\mathbf{V}_{s1}{}^2+\mathbf{V}_{s2}{}^2+\mathbf{V}_{s2}{}^2\right)$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{3}\mathbf{V}_s\cdot\mathbf{e}_\alpha\left(\mathbf{V}_{s1}\frac{\partial\mathbf{V}_{s1}}{\partial\mathbf{x}_\alpha}+\mathbf{V}_{s2}\frac{\partial\mathbf{V}_{s2}}{\partial\mathbf{x}_\alpha}+\mathbf{V}_{s3}\frac{\partial\mathbf{V}_{s3}}{\partial\mathbf{x}_\alpha}\right)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\mathbf{V}_{s\alpha}\mathbf{V}_{s\beta}\frac{\partial\mathbf{V}_{s\beta}}{\partial\mathbf{x}_\alpha}$$

に注目すると、

$$(\text{左辺})=m_s n_s\mathbf{V}_s\cdot\frac{\partial\mathbf{V}_s}{\partial t}+m_s n_s\mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{V}_s{}^2+\mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}}p_s$$

したがって、

$$\boxed{m_s n_s\mathbf{V}_s\cdot\frac{\partial\mathbf{V}_s}{\partial t}+m_s n_s\mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{V}_s{}^2=-\mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}}p_s+\mathbf{j}_s\cdot\mathbf{E}+\mathbf{V}_s\cdot\mathbf{R}_s-m_s S_s\mathbf{V}_s{}^2}$$

流体方程式(その7)

以上をまとめると(等方の場合)、

$$\frac{\partial n_s(\mathbf{x},t)}{\partial t}+\nabla\cdot\left(n_s(\mathbf{x},t)\mathbf{V}_s(\mathbf{x},t)\right)=S_s(\mathbf{x},t)$$

粒子数の保存則
(連続の式)

$$m_s n_s\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\left(\mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\right)\right\}\mathbf{V}_s+\nabla p_s=n_s q_s\left(\mathbf{E}+\mathbf{V}_s\times\mathbf{B}\right)+\mathbf{R}_s-m_s S_s\mathbf{V}_s$$

運動量の保存則

$$\frac{3}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\right\}p_s+\frac{5}{2}p\nabla\cdot\mathbf{V}_s=\mathbf{T}_s-\mathbf{V}_s\cdot\mathbf{R}_s+\frac{m_s\mathbf{V}_s^{\ 2}}{2}S_s$$

エネルギーの保存則

$\nabla_{\mathbf{x}} \Rightarrow \nabla$

$\langle\mathbf{E}\rangle \Rightarrow \mathbf{E}$　$\langle\mathbf{B}\rangle \Rightarrow \mathbf{B}$

$S_s\equiv\int_{\mathbf{v}}C_s\mathrm{d}\mathbf{v}$ 粒子源

$\mathbf{R}_s\equiv\int_{\mathbf{v}}m_s\mathbf{v}C_s\mathrm{d}\mathbf{v}$ 摩擦力

$\mathbf{T}_s\equiv\int_{\mathbf{v}}\frac{m_s\mathbf{v}^2}{2}C_s\mathrm{d}\mathbf{v}$ 衝突によるエネルギー変化

電磁流体力学の基礎となる流体方程式

Advanced

非等方な粒子集団に対する流体方程式

$$\frac{\partial n_s(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \nabla\cdot\left(n_s(\mathbf{x},t)\mathbf{V}_s(\mathbf{x},t)\right) = S_s(\mathbf{x},t)$$

粒子数の保存則
(連続の式)

$$m_s n_s\left\{\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}})\right\}\mathbf{V}_s + \nabla p_s + \boxed{\nabla\cdot\Pi_s} = n_s q_s(\mathbf{E} + \mathbf{V}_s\times\mathbf{B}) + \mathbf{R}_s - m_s S_s\mathbf{V}_s$$

運動量の保存則

$$\frac{3}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\right\}p_s + \frac{5}{2}p_s\nabla\cdot\mathbf{V}_s + \boxed{\sum_{\alpha\beta}\mathbf{\Pi}_{s\alpha\beta}\frac{\partial \mathbf{V}_{s\alpha}}{\partial \mathbf{x}_\beta} + \nabla\cdot\mathbf{q}_s}$$

$$= \mathbf{T}_s - \mathbf{V}_s\cdot\mathbf{R}_s + \frac{m_s\mathbf{V}_s^{\ 2}}{2}S_s$$

エネルギーの保存則

$$p_s \equiv \frac{1}{3}Tr\left(\overleftrightarrow{\mathbf{P}}\right) \qquad \Pi \equiv \overleftrightarrow{\mathbf{P}} - p\overleftrightarrow{\mathbf{1}}$$

Tr(); 対角要素の和

非等方では、$\neq 0$

$$\frac{m_s}{2}\left\|\mathbf{v}^2\mathbf{v}\right\|_s$$

非等方では、$p+\alpha$

$$= \frac{m_s}{2}\left\|\mathbf{V}_s^{\ 2}\mathbf{V}_s + \cancel{2(\mathbf{V}_s\cdot\delta\mathbf{v})}\mathbf{V}_s + \delta\mathbf{v}^2\mathbf{V}_s + \cancel{\mathbf{V}_s^{\ 2}\delta\mathbf{v}} + 2(\mathbf{V}_s\cdot\delta\mathbf{v})\delta\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}^2\delta\mathbf{v}\right\|_s$$

輸送解析には、上記の式を基礎式とする。

磁気面を横切る輸送は、分布関数が「非等方」、「磁気面上で一定でない」ことから助長される。

分布関数の形を決める追加情報がないと、方程式が閉じない。

より高次のモーメントの式を作っても、変数が減らない。

熱･電磁流体物理特論@ES025, Thus.10:30~

0. イントロ

（MHD研究の意義;熱核融合発電炉の開発研究での位置づけ等）

1. MHD平衡特性、安定特性の粒子的描像と流体的描像の概説

2. 速度分布関数とは

3. 流体方程式と電磁流体方程式(MHD方程式)とは

4. MHD方程式に基づくプラズマのMHD平衡特性、安定特性の評価例

5. MHD研究のトピックス等

一流体方程式(その7)

速度分布が等方の場合の粒子種sに対する流体方程式

$$\frac{\partial n_s(\mathbf{x},t)}{\partial t}+\nabla\cdot\left(n_s(\mathbf{x},t)\mathbf{V}_s(\mathbf{x},t)\right)=S_s(\mathbf{x},t)$$

粒子数の保存則
(連続の式)

$$m_s n_s\left\{\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{V}_s\cdot\nabla)\right\}\mathbf{V}_s+\nabla p_s=n_s q_s(\mathbf{E}+\mathbf{V}_s\times\mathbf{B})+\mathbf{R}_s-m_s S_s\mathbf{V}_s$$

運動量の保存則

$$\frac{3}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}_s\cdot\nabla\right\}p_s+\frac{5}{2}p\nabla\cdot\mathbf{V}_s=\mathbf{T}_s-\mathbf{V}_s\cdot\mathbf{R}_s+\frac{m_s\mathbf{V}_s^{\;2}}{2}S_s$$

エネルギーの保存則

上式は、粒子種ごとに満たされるべき方程式である。次に、電気的にほぼ中性なプラズマを**一つの流体と考えた時の流体方程式**を考えてみる。ここでは、電子と一価のイオンからなるプラズマを考える。

新たな方程式(「法則」)を導く目的は?

プラズマ中では、幅広い特性長、特性時間を持つ現象が同時に起こっている。その中の、興味ある現象の特徴を抽出するのに、十分でかつ、解析しやすい(解きやすい)方程式を導出する。

例えば、イオンの近くで細かく動く電子の動き(プラズマ振動)は無視し、イオンと電子が一体となって動く現象(ExBドリフト)に着目するなど。

一流体方程式(その2)

電子とイオンの総質量ρ、密度差(総電荷密度)σ、重心速度$\mathbf{u}$、相対速度(電流密度)$\mathbf{j}$、総圧力pを一流体の流体指標として、考えると、電子、イオンの密度n_i, n_e, 流速$\mathbf{V}_\mathrm{i}$, $\mathbf{V}_\mathrm{e}$, 圧力p_i, p_eを使って以下のように表せる。

$$\rho \equiv m_i n_i + m_e n_e \qquad \sigma \equiv e(Zn_i - n_e) \qquad p \equiv p_i + p_e$$

$$\mathbf{u} \equiv \frac{m_i n_i \mathbf{V}_i + m_e n_e \mathbf{V}_e}{m_i n_i + m_e n_e} \qquad \mathbf{j} \equiv e(Zn_i \mathbf{V}_i - n_e \mathbf{V}_e)$$

ここで、m_i, m_eは、電子、イオンの質量密度、Zはイオンの価数。

イオンと電子の連続の式に、それぞれm_i, m_eを掛けて両辺の和を取ると、

$$\frac{\partial(m_i n_i + m_e n_e)}{\partial t} + \nabla\cdot(m_i n_i \mathbf{V}_i + m_e n_e \mathbf{V}_e) = 0 \qquad \boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0}$$

同様に、イオンと電子の連続の式に、それぞれZe, $-e$を掛けて両辺の和を取ると、

$$\boxed{\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0}$$

式変形は、「核融合とプラズマの制御」内田岱二郎・井上信幸著、東京大学出版会、第9章を参照のこと

一流体方程式(その3)

ここで、粒子種sの速度$\mathbf{v}_s$をプラズマの重心速度$\mathbf{u}$と重心速度$\mathbf{u}$で動く系に対する相対速度$\mathbf{w}_s$に分解して書けるとする。

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{u} + \mathbf{w}_s. \text{ すなわち、} \mathbf{w}_s \equiv \mathbf{v}_s - \mathbf{u}.$$

この場合、$\mathbf{v}_s$の速度空間の平均が$\mathbf{u}$と異なることから、$\mathbf{w}_s$の速度空間の平均も0とならないことに注意して、$\mathbf{w}_s$の速度空間の平均$\mathbf{c}_s$を導入する。

$$\mathbf{c}_s \equiv \|\mathbf{w}_s\| = \frac{1}{n_s}\int_{\mathbf{v}} \mathbf{w}_s f_s \mathrm{d}\mathbf{v}. \qquad \boxed{\therefore \mathbf{c}_s = \|\mathbf{v}_s - \mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}_s\| - \mathbf{u} = \mathbf{V}_s - \mathbf{u}.}$$

この時、$\mathbf{c}_s$は以下の関係を満たすことに注意。

$$\boxed{\sum_{i,e} m_s n_s \mathbf{c}_s \equiv \sum_{i,e} m_s n_s \|\mathbf{w}_s\| = \sum_{i,e} m_s n_s \|\mathbf{v}_s - \mathbf{u}\| = \sum_{i,e} m_s n_s \|\mathbf{v}_s\| - \mathbf{u}\sum_{i,e} m_s n_s = \rho\mathbf{u} - \mathbf{u}\rho = 0.}$$

$$\boxed{\mathbf{j} = \sum_{i,e} q_s n_s \|\mathbf{v}_s\| = \sum_{i,e} q_s n_s \|\mathbf{u} + \mathbf{w}_s\| = \sum_{i,e} q_s n_s (\mathbf{u} + \mathbf{c}_s).}$$

\# 粒子種sの運動量保存の式を$\mathbf{c}_s$を使って書き直すと、

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(m_s n_s (\mathbf{u} + \mathbf{c}_s)\right) + \nabla\cdot\left(m_s n_s (\mathbf{u} + \mathbf{c}_s)(\mathbf{u} + \mathbf{c}_s)\right) = n_s q_s \left(\mathbf{E} + (\mathbf{u} + \mathbf{c}_s)\times\mathbf{B}\right) + \mathbf{R}_s}$$

$$\nabla\cdot\left(m_s n_s (\mathbf{u}\mathbf{u} + \mathbf{c}_s\mathbf{u} + \mathbf{u}\mathbf{c}_s + \mathbf{c}_s\mathbf{c}_s)\right) + \nabla p$$

$$\because \text{等方の場合、} \nabla\cdot\left(m_s n_s \mathbf{c}_s \mathbf{c}_s\right) = \nabla p_s$$

一流体方程式(その4)

イオンと電子の運動量保存の式の両辺の和を取ると、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left((m_i n_i + m_e n_e)\mathbf{u}\right) + \frac{\partial}{\partial t}(m_i n_i \mathbf{c}_i + m_e n_e \mathbf{c}_e) \\
&+\nabla\cdot\left((m_i n_i + m_e n_e)\mathbf{u}\mathbf{u}\right) + \nabla\cdot\left(\mathbf{u}(m_i n_i \mathbf{c}_i + m_e n_e \mathbf{c}_e)\right) + \nabla\cdot\left((m_i n_i \mathbf{c}_i + m_e n_e \mathbf{c}_e)\mathbf{u}\right) \\
&+\nabla(p_i + p_e) \\
&= (q_i n_i + q_e n_e)\mathbf{E} + \left(q_i n_i(\mathbf{u}+\mathbf{c}_i) + q_e n_e(\mathbf{u}+\mathbf{c}_e)\right)\times\mathbf{B} + \mathbf{R}_i + \mathbf{R}_e
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{i,e} m_s n_s \mathbf{c}_s = 0. \qquad \mathbf{j} = \sum_{i,e} q_s n_s(\mathbf{u}+\mathbf{c}_s).
$$

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left((m_i n_i + m_e n_e)\mathbf{u}\right) + \nabla\cdot\left((m_i n_i + m_e n_e)\mathbf{u}\mathbf{u}\right) = (q_i n_i + q_e n_e)\mathbf{E} + (q_i n_i + q_e n_e)\mathbf{u}\times\mathbf{B} - \nabla p
$$

$$
\therefore \frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u}) + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}\mathbf{u}) = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B} - \nabla p
$$

ここで、$p \equiv p_i + p_e$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0$ 　 $\nabla\cdot(\rho\mathbf{u}\mathbf{u}) = \rho\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla\cdot(\rho\mathbf{u})$ を使って書き直すと、

$$
\boxed{\rho\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\right\}\mathbf{u} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B} - \nabla p}
$$

一流体方程式(その5)

同様に、イオンと電子の連続の式に、それぞれZe/m_i, $-e/m_e$を掛けて両辺の和を取ると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e\left(Zn_i\mathbf{V}_i - n_e\mathbf{V}_e\right)\right)$$
$$+\nabla\cdot\left(e\left(Zn_i - n_e\right)\mathbf{uu}\right)+\nabla\cdot\left(\mathbf{u}e\left(Zn_i\mathbf{c}_i - n_e\mathbf{c}_e\right)\right)+\nabla\cdot\left(e\left(Zn_i\mathbf{c}_i - n_e\mathbf{c}_e\right)\mathbf{u}\right)$$
$$+\nabla\left(\frac{Ze}{m_i}p_i - \frac{e}{m_e}p_e\right)$$
$$=\left(\frac{Z^2e^2n_i}{m_i}+\frac{e^2n_e}{m_e}\right)\left(\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}\right)+\left(\frac{Z^2e^2n_i}{m_i}\mathbf{c}_i+\frac{e^2n_e}{m_e}\mathbf{c}_e\right)\times\mathbf{B}+\frac{Ze}{m_i}\mathbf{R}_i-\frac{e}{m_e}\mathbf{R}_e$$

ここで、 $\mathbf{j}=\left(Zen_i - en_e\right)\mathbf{u}+Zen_i\mathbf{c}_i - en_e\mathbf{c}_e.\quad \mathbf{c}_s=\mathbf{V}_s-\mathbf{u}.\quad \sigma\equiv e\left(Zn_i - n_e\right)$

$$\mathbf{u}e\left(Zen_i\mathbf{c}_i - n_e\mathbf{c}_e\right)=\mathbf{u}e\left(Zn_i\mathbf{V}_i - n_e\mathbf{V}_e\right)-\mathbf{u}e\left(Zn_i - n_e\right)\mathbf{u}=\mathbf{uj}-\sigma\mathbf{uu}.$$

$$e\left(Zen_i\mathbf{c}_i - n_e\mathbf{c}_e\right)\mathbf{u}=\mathbf{ju}-\sigma\mathbf{uu}.$$

$$\therefore\left(\text{左辺第}2\sim4\text{項}\right)=\nabla\cdot\left(\sigma\mathbf{uu}\right)+\nabla\cdot\left(\mathbf{uj}-\sigma\mathbf{uu}\right)+\nabla\cdot\left(\mathbf{ju}-\sigma\mathbf{uu}\right)$$
$$=\boxed{\nabla\cdot\left(\mathbf{uj}+\mathbf{ju}-\sigma\mathbf{uu}\right)}$$

一流体方程式(その6)

右辺第2項を考える。

$$\sum_{i,e} m_s n_s \mathbf{c}_s = 0.$$

$$\frac{Z^2e^2n_i}{m_i}\mathbf{c}_i + \frac{e^2n_e}{m_e}\mathbf{c}_e = \frac{Z^2e^2n_im_e\mathbf{c}_i + e^2n_em_i\mathbf{c}_e}{m_im_e} - Ze^2\frac{n_im_i\mathbf{c}_i + n_em_e\mathbf{c}_e}{m_im_e}$$

$$= e^2\frac{Z^2n_im_e\mathbf{c}_i - Zn_im_i\mathbf{c}_i - Zn_em_e\mathbf{c}_e + n_em_i\mathbf{c}_e}{m_im_e}$$

$$\mathbf{c}_s = \mathbf{V}_s - \mathbf{u}.$$

$$= e^2\frac{(Zn_i\mathbf{c}_i - n_e\mathbf{c}_e)(Zm_e - m_i)}{m_im_e} = e^2\frac{(Zn_i\mathbf{V}_i - n_e\mathbf{V}_e)(Zm_e - m_i)}{m_im_e} - e^2\frac{(Zn_i - n_e)(Zm_e - m_i)}{m_im_e}\mathbf{u}$$

$$= e\frac{\mathbf{j}(Zm_e - m_i)}{m_im_e} - e\frac{(Zm_e - m_i)}{m_im_e}\sigma\mathbf{u} = \frac{(Zm_e - m_i)}{m_im_e}(\mathbf{j} - \sigma\mathbf{u})$$

したがって、右辺第2項は

$$\left(\frac{Z^2e^2n_i}{m_i} + \frac{e^2n_e}{m_e}\right)\mathbf{c}_s \times \mathbf{B} = \boxed{-\frac{m_i - Zm_e}{m_im_e}(\mathbf{j} - \sigma\mathbf{u}) \times \mathbf{B}}$$

プラズマが電子と一種のイオンのみで構成されている場合、作用・反作用の性質から、

$$\int_{\mathbf{v}} m_i\mathbf{v}C_i\mathrm{d}\mathbf{v} + \int_{\mathbf{v}} m_e\mathbf{v}C_e\mathrm{d}\mathbf{v} = 0 \qquad \therefore \mathbf{R}_i = -\mathbf{R}_e$$

したがって、右辺第3-4項は、

$$\frac{Ze}{m_i}\mathbf{R}_i - \frac{e}{m_e}\mathbf{R}_e = \boxed{e\frac{Zm_e + m_i}{m_im_e}\mathbf{R}_e}$$

一流体方程式(その7)

まとめると、

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}+\nabla\cdot(\mathbf{uj}+\mathbf{ju}-\sigma\mathbf{uu})+e\frac{Zm_e\nabla p_i-m_i\nabla p_e}{m_im_e}$$

$$=e^2\frac{Z^2n_im_e+n_em_i}{m_im_e}(\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B})+e^2\frac{Zm_e-m_i}{m_im_e}(\mathbf{j}-\sigma\mathbf{u})\times\mathbf{B}-e\frac{Zm_e+m_i}{m_im_e}\mathbf{R}_e$$

整理して、

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}-\frac{m_i-Zm_e}{n_em_i+Z^2n_im_e}(\mathbf{j}-\sigma\mathbf{u})\times\mathbf{B}+\frac{m_i\nabla p_e-Zm_e\nabla p_i}{e(n_em_i+Z^2n_im_e)}\\&=\frac{m_im_e}{n_em_i+Z^2n_im_e}\left\{\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}+\nabla\cdot(\mathbf{uj}+\mathbf{ju}-\sigma\mathbf{uu})\right\}+\eta\mathbf{j}\end{aligned}}$$

$\mathbf{R}_e$は、電子とイオンの総土差が大きいほど大きいと推測できるので、

$$\frac{m_i+Zm_e}{e(n_em_i+Z^2n_im_e)}\mathbf{R}_e\approx\eta\mathbf{j}$$

と近似した。ηは、抵抗率に対応。

エネルギーの保存則

圧力の時間発展を決める式として、本来はエネルギー保存則を解くべきであるが、近似として以下の式を用いることが多い。

$$\boxed{\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\right\}p+\gamma p\nabla\cdot\mathbf{u}=0}$$

断熱圧縮の式

γは、比熱比。

一流体方程式(その8)

以上まとめると、電子と一種のイオンからなる**一流体方程式**を得る。

$$\rho \equiv m_i n_i + m_e n_e \qquad \sigma \equiv e(Zn_i - n_e)$$

$$\mathbf{u} \equiv \frac{m_i n_i \mathbf{V}_i + m_e n_e \mathbf{V}_e}{m_i n_i + m_e n_e} \qquad \mathbf{j} \equiv e(Zn_i \mathbf{V}_i - n_e \mathbf{V}_e)$$

(1) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

(2) $$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

(3) $$\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right\} \mathbf{u} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p$$

(4) $$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{m_i - Zm_e}{e(n_e m_i + Z^2 n_i m_e)} (\mathbf{j} - \sigma \mathbf{u}) \times \mathbf{B} + \frac{m_i \nabla p_e - Zm_e \nabla p_i}{e(n_e m_i + Z^2 n_i m_e)} = \frac{m_i m_e}{e^2 (n_e m_i + Z^2 n_i m_e)} \left\{ \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{uj} + \mathbf{ju} - \sigma \mathbf{uu}) \right\} + \eta \mathbf{j}$$

(5) $$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right\} p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

(6, 7) $$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

(8, 9) $$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

電磁流体方程式(その1)

一流体方程式を導くにあたって、「圧力が等方、電子と一種のイオンのみで構成されるプラズマを対象とする」等、いくつかの近似を行ったが、それでも方程式は複雑である。
特に、電子は質量がイオンに比べて格段に軽いので、電子の速い時間変化の現象(プラズマ振動等の効果)を一流体方程式は含んでいる。

MHD平衡や不安定性の物理的描像の講義で説明したように、電磁流体力学では、**∇BxBドリフトやExBドリフト**が重要で、特性長はプラズマ大半径・小半径程度の現象に興味があるので、一流体方程式の各項の大きさを評価して、上記の興味がある現象の特性を抽出でき、かつ、簡単な方程式群(MHD方程式)を導出する。

各項の大きさを評価するために、プラズマの巨視的な変数が変化する距離の値をL**(特性長)**、プラズマの媒質の運動速度の代表値をV_0とする。すると、プラズマの巨視的な変数が変化する時間はL/V_0**(特性時間)**で表せることができる。

特性長、特性時間を使って各項の効果を評価する手法=>次元解析

各項の効果のorder(大体の大きさ)を評価し、同じorderの効果持つ項だけを取り出す近似手法=>ordering

電磁流体方程式(その2)

(8)の左辺 $\sim \dfrac{E_0}{L}$ (8)の右辺 $\sim \dfrac{B_0 V_0}{L}$ $\Rightarrow E_0 \sim B_0 V_0$

(6)の左辺 $\sim \dfrac{B_0}{L}$ (6)の右辺第1項 $\sim \mu_0 j_0$ (6)の右辺第2項 $\sim \dfrac{\mu_0 \varepsilon_0 E_0 V_0}{L} = \cancel{\dfrac{E_0 V_0}{c^2 B_0}} \dfrac{B_0}{L}$

(6)**の右辺第2項/**(6)**の左辺**$\sim E_0 V_0/B_0/c^2 \sim V_0^2/c^2 << 1$ $\Rightarrow \mu_0 j_0 \sim B_0 / L$

(1)の左辺第1項 $\sim \rho_0 \dfrac{V_0}{L}$ (1)の左辺第2項 $\sim \dfrac{1}{L}\rho_0 V_0$

(2)の左辺第1項 $\sim \sigma_0 \dfrac{V_0}{L} = \dfrac{j_0}{L}\dfrac{\sigma_0 V_0}{j_0}$? (2)の左辺第2項 $\sim \dfrac{1}{L} j_0$

(3)の左辺第1項 $\sim \rho_0 \dfrac{V_0}{L} V_0$ (3)の左辺第2項 $\sim \rho_0 \dfrac{V_0}{L} V_0$

(3)の右辺第1項 $\sim \sigma_0 E_0 = \sigma_0 V_0 B_0 = \dfrac{\rho_0 V_0^2}{L}\dfrac{\sigma_0 B_0 L}{\rho_0 V_0} = \dfrac{\rho_0 V_0^2}{L}\dfrac{\sigma_0 V_0}{j_0}\dfrac{B_0}{L\mu_0}\dfrac{B_0 L}{\rho_0 V_0^2} = \dfrac{\rho_0 V_0^2}{L}\dfrac{\sigma_0 V_0}{j_0}\dfrac{B_0^2/\mu_0}{\rho_0 V_0^2}$?

(3)の右辺第2項 $\sim j_0 B_0 = \dfrac{B_0^2}{\mu_0 L} = \dfrac{\rho_0 V_0^2}{L}\dfrac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0 V_0^2}$ (3)の右辺第3項 $\sim \dfrac{\rho_0 T_0}{m_i L} = \dfrac{\rho_0 V_0^2}{L}\dfrac{T_0}{m_i V_0^2}$

$\Rightarrow v_{thi} \sim V_0$

電磁流体方程式(その3)

(4)の左辺第1項 $\sim E_0 = B_0V_0$　　(4)の左辺第2項 $\sim B_0V_0$

$$\text{(4)の左辺第3項} \sim \frac{m_i}{e\rho_0}\left(\frac{B_0^{\,2}}{\mu_0 L} - \sigma_0 V_0 B_0\right) \sim V_0B_0\left(\frac{B_0^{\,2}}{\rho_0\mu_0}\frac{m_i}{B_0 e}\frac{1}{LV_0} - \frac{\sigma_0}{en_i}\right) = V_0B_0\left(\frac{m_e}{n_e e^2\mu_0}\frac{B_0 e}{m_e}\frac{1}{LV_0} - \frac{\sigma_0}{en_i}\right)$$

$$= V_0B_0\left(\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\varepsilon_0 m_e}{n_e e^2}\frac{B_0 e}{m_e}\frac{1}{LV_0} - \frac{\sigma_0}{en_i}\right) = V_0B_0\left(\overset{?}{\frac{\Omega_{ce}}{\omega_{pe}}}\frac{c^2}{\omega_{pe}LV_0} - \cancel{\frac{\sigma_0}{en_i}}\right)$$

$\omega_{pe} \sim 6\times10^{11}s^{-1}, \Omega_{ce} \sim 1\times10^{11}s^{-1},$

$c \sim 3\times10^{8}m/s$　$V_0 \sim 1\times10^{4}m/s$

$$\text{(4)の左辺第4項} \sim \frac{1}{e\rho_0}\left(m_i\frac{\rho_0T_0}{m_iL} - m_e\frac{\rho_0T_0}{m_iL}\right) \sim B_0V_0\frac{T_0/Le}{B_0V_0} \overset{?}{\sim} B_0V_0\frac{E_0}{B_0V_0}$$

$$\text{(4)の右辺第1}\sim\text{4項} \sim \frac{m_im_e}{e^2\rho_0}\left(\frac{j_0V_0}{L}+\frac{V_0j_0}{L}+\frac{j_0V_0}{L}-\frac{\sigma_0V_0^{\,2}}{L}\right) \sim \frac{m_im_e}{e^2\rho_0}\left(\frac{B_0V_0}{\mu_0L^2}-\frac{\sigma_0V_0^{\,2}}{L}\right)$$

$$\sim B_0V_0\left(\frac{\varepsilon_0m_e}{e^2n_e}\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0L^2} - \frac{\varepsilon_0m_e}{e^2n_e}\frac{\sigma_0V_0}{\varepsilon_0LB_0}\right) = B_0V_0\left(\cancel{\frac{c^2/L^2}{\omega_{pe}^{\,2}}} - \cancel{\frac{c^2/L^2}{\omega_{pe}^{\,2}}}\frac{\sigma_0LV_0}{\varepsilon_0B_0}\right)$$

$$\text{(4)の右辺第5項} \sim \eta j_0 = \frac{m_im_e\nu_{ei}}{e^2\rho_0}\frac{B_0}{\mu_0L} \sim \frac{\varepsilon_0m_e}{e^2n_e}\frac{B_0V_0}{\varepsilon_0\mu_0L^2}\frac{L\nu_{ei}}{V_0} = B_0V_0\frac{c^2/L^2}{\omega_{pe}^{\,2}}\frac{L\nu_{ei}}{V_0}$$

電磁流体方程式(その4)

$$\rho \equiv m_i n_i + m_e n_e \qquad \sigma \equiv e\left(Z n_i - n_e\right)$$

$$\mathbf{u} \equiv \frac{m_i n_i \mathbf{V}_i + m_e n_e \mathbf{V}_e}{m_i n_i + m_e n_e} \qquad \mathbf{j} \equiv e\left(Z n_i \mathbf{V}_i - n_e \mathbf{V}_e\right)$$

(1) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

(2) $$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

(3) $$\overset{?}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right\}\mathbf{u} = \overset{?}{\sigma}\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p$$

(4) $$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{m_i - \cancel{Z m_e}}{e\left(n_e m_i + \cancel{Z^2 n_i m_e}\right)}\overset{?}{(}\mathbf{j} - \cancel{\sigma}\mathbf{u}) \times \mathbf{B} + \frac{m_i \overset{?}{\nabla} p_e - \cancel{Z m_e \nabla p_i}}{e\left(n_e m_i + \cancel{Z^2 n_i m_e}\right)}$$
$$= \frac{m_i m_e}{e^2\left(n_e m_i + \cancel{Z^2 n_i m_e}\right)}\left\{\cancel{\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\mathbf{u}\mathbf{j} + \mathbf{j}\mathbf{u} - \sigma \mathbf{u}\mathbf{u}\right)}\right\} + \eta \mathbf{j}$$

(5) $$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right\} p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

(6, 7) $$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \cancel{\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

(8, 9) $$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

電磁流体方程式(その5)

整理すると、

(1) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

(2) $$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

?

(3) $$\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right\} \mathbf{u} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p$$

?

(4) $$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{n_e e} + \frac{\nabla p_e}{e n_e} = \eta \mathbf{j}$$

(5) $$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right\} p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

(6, 7) $$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

(8, 9) $$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

σの値が知りたいときは、(8)式から評価する。

ここで、式(6)の両辺の発散を取ると

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

したがって、式(2)から、

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

となってしまうが、この条件は、厳しすぎる条件となっている。

また、式(9)、(4)から、一般的には

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \sigma / \partial t}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\varepsilon_0 \nabla \cdot \left(\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{j \times \mathbf{B}}{n_e e} + \frac{\nabla p_e}{n_e e} \right) \neq 0$$

となり矛盾。

以上のことから、**式(2)は条件式からはずす**。また、**近似的にσ=0が成り立っているとして、式(3)のσEを0と近似**する。

電磁流体方程式(その6)

電磁流体近似に基づく方程式

(1) $$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{u})=0$$

(2) $$\rho\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\right\}\mathbf{u}=\mathbf{j}\times\mathbf{B}-\nabla p$$

(3) $$\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}=\eta\mathbf{j}$$

一般化されたオーム則

(4) $$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\right\}p+\gamma p\nabla\cdot\mathbf{u}=0$$

(5) $$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{j},$$

(6) $$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

(7) $$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

(8) $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$,(初期条件)

抵抗率ηが0の場合は、**理想MHD方程式**と呼ぶ。

変数は、以下のスカラー量3、ベクトル量4の合計15である。

$$\rho,\mathbf{u},\mathbf{j},p,\mathbf{B},\mathbf{E},\sigma$$

一方、式は16個あるので、式(8)は、初期条件の一つと見なす。

特徴

- 磁力線を横切る流体の重心速度は、ExBドリフトで決まる。

$$u_\perp\sim E/B$$

- ExBドリフト速度は、イオンの熱速度同程度になる場合まで考える。

$$u_\perp\sim v_{thi}$$

磁力線を横切る大きな流れが引き起こす現象の性質を調べる。

これは、常に大きな磁力線を横切る流れがあることを意味していないことに注意。流速が時間変化する時、EXB程度の大きな流れが発生できる状況を考えるということ。

MHD方程式 の 特徴 （1）

運動方程式の両辺とuとの内積を考える。

$$\rho\mathbf{u}\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\rho\boxed{\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{j}\times\mathbf{B}-\mathbf{u}\cdot\nabla p$$

$$(\text{左辺})=\frac{\rho}{2}\frac{\partial\mathbf{u}^2}{\partial t}+\frac{\rho}{2}\boxed{(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{2}\mathbf{u}^2\right)-\frac{\mathbf{u}^2}{2}\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}}+\frac{\rho}{2}(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}^2$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{2}\mathbf{u}^2\right)+\frac{\mathbf{u}^2}{2}\boxed{\nabla\cdot(\rho\mathbf{u})}+\left(\frac{\rho\mathbf{u}}{2}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}^2=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho\mathbf{u}^2}{2}\right)+\nabla\cdot\left(\frac{\rho\mathbf{u}^2}{2}\mathbf{u}\right)$$

$$\boxed{\partial\rho/\partial t+\nabla\cdot(\rho\mathbf{u})=0}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbf{V}_s\cdot(\mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{V}_s=\mathbf{V}_s\cdot\sum_{\beta=1}^{3}\left(\sum_{\alpha=1}^{3}\mathbf{V}_{s\alpha}\frac{\partial\mathbf{V}_{s\beta}}{\partial\mathbf{x}_\alpha}\right)\mathbf{e}_\beta\\&=\sum_{\beta=1}^{3}\mathbf{V}_{s\beta}\left(\sum_{\alpha=1}^{3}\mathbf{V}_{s\alpha}\frac{\partial\mathbf{V}_{s\beta}}{\partial\mathbf{x}_\alpha}\right)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\mathbf{V}_{s\beta}\mathbf{V}_{s\alpha}\frac{\partial\mathbf{V}_{s\beta}}{\partial\mathbf{x}_\alpha}\\&\mathbf{V}_s\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{V}_s{}^2=\sum_{\alpha=1}^{3}\mathbf{V}_s\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}_\alpha}\left(\mathbf{V}_{s1}{}^2+\mathbf{V}_{s2}{}^2+\mathbf{V}_{s2}{}^2\right)\\&=\sum_{\alpha=1}^{3}\mathbf{V}_s\cdot\mathbf{e}_\alpha\left(\mathbf{V}_{s1}\frac{\partial\mathbf{V}_{s1}}{\partial\mathbf{x}_\alpha}+\mathbf{V}_{s2}\frac{\partial\mathbf{V}_{s2}}{\partial\mathbf{x}_\alpha}+\mathbf{V}_{s3}\frac{\partial\mathbf{V}_{s3}}{\partial\mathbf{x}_\alpha}\right)\\&=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\mathbf{V}_{s\alpha}\mathbf{V}_{s\beta}\frac{\partial\mathbf{V}_{s\beta}}{\partial\mathbf{x}_\alpha}\end{aligned}}$$

流体方程式(その6’)より

$$(\text{右辺第一項})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{j}\times\mathbf{B}=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{u}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}=\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\mathbf{B})\cdot\boxed{(\mathbf{B}\times\mathbf{u})}$$

$$\boxed{\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}=0}$$

$$=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})=\frac{1}{\mu_0}\{\nabla\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{E})+\mathbf{B}\cdot\boxed{(\nabla\times\mathbf{E})}\}$$

$$\boxed{\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}}$$

$$=\frac{1}{\mu_0}\left\{-\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B})-\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right\}=-\frac{1}{\mu_0}\left\{\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B})+\frac{1}{2}\frac{\partial\mathbf{B}^2}{\partial t}\right\}$$

$$(\text{右辺第二項})=\boxed{\mathbf{u}\cdot\nabla p}=\frac{1}{\gamma-1}\left\{\frac{\partial P}{\partial t}+\gamma\nabla\cdot(p\mathbf{u})\right\}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\because\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\right\}p+\gamma p\nabla\cdot\mathbf{u}=0\\&\Rightarrow\frac{\partial p}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla p+\gamma\nabla\cdot(p\mathbf{u})-\gamma\mathbf{u}\cdot\nabla p=0\\&\Rightarrow(\gamma-1)\mathbf{u}\cdot\nabla p=\frac{\partial p}{\partial t}+\gamma\nabla\cdot(p\mathbf{u})\end{aligned}}$$

MHD方程式 の 特徴 （1-2）

以上まとめると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho \mathbf{u}^2}{2}\right)+\nabla\cdot\left(\frac{\rho \mathbf{u}^2}{2}\mathbf{u}\right)+\frac{1}{\mu_0}\left\{\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B})+\frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial t}\right\}+\frac{1}{\gamma-1}\left\{\frac{\partial p}{\partial t}+\gamma\nabla\cdot(p\mathbf{u})\right\}=0$$

$$\boxed{\therefore \frac{\partial}{\partial t}\left(\underbrace{\frac{\rho \mathbf{u}^2}{2}}_{\text{運動エネルギー}}+\underbrace{\frac{p}{\gamma-1}}_{\text{内部(熱)エネルギー}}+\underbrace{\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}}_{\text{磁気(電磁)エネルギー}}\right)+\nabla\cdot\left(\underbrace{\frac{\rho \mathbf{u}^2}{2}\mathbf{u}}_{\text{対流によるエネルギー流速}}+\underbrace{\frac{p}{\gamma-1}\mathbf{u}}_{\text{熱流速}}+\underbrace{\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_0}}_{\text{ポインティングベクトル}}\right)=0}$$

理想MHD方程式系のエネルギー保存則

方程式導出時にいくつかの近似を行ったが、経験的によく知られたエネルギー保存則を満たしていることに注意。

プラズマ境界で境界面に垂直方向の流速を0、境界面は完全導体で覆われているとすると、境界面で、$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=0,\ \ \mathbf{E}\times\mathbf{n}=0$ (nは、境界面の法線ベクトル)

$$\boxed{\therefore \frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{\rho \mathbf{u}^2}{2}+\frac{p}{\gamma-1}+\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}\right)dV=0}$$

$$\because \int_V \nabla\cdot\left(\frac{\rho \mathbf{u}^2}{2}\mathbf{u}+\frac{p}{\gamma-1}\mathbf{u}+\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_0}\right)dV$$
$$=\int_{\text{境界}}\left(\frac{\rho \mathbf{u}^2}{2}\mathbf{u}+\frac{p}{\gamma-1}\mathbf{u}+\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_0}\right)\cdot\mathbf{n}dS=0$$

$\int_V\left(\frac{\rho \mathbf{u}^2}{2}+\frac{p}{\gamma-1}+\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}\right)dV$ は、保存される。

MHD方程式 の 特徴 (2)

運動方程式、ファラデー則を考える。

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}=\mathbf{j}\times\mathbf{B}-\nabla p,\ \nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{j}.$$

$$=> \rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}=\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}-\nabla p$$

$\mathrm{v}_A\equiv\sqrt{\frac{B_0{}^2}{\mu_0\rho_0}}$;アルベン速度

ρ_0;中心の密度, p_0;中心の圧力。

B_0;中心の磁場強度。

規格化/無次元化
(基準値で割る)

$$\hat{\rho}=\frac{\rho}{\rho_0},\ \hat{\mathbf{u}}=\frac{\mathbf{u}}{\mathrm{v}_A},\hat{\nabla}=a_0\hat{\nabla},\ \hat{t}=\frac{t}{a_0/\mathrm{v}_A},\quad \nabla\hat{\mathbf{B}}=\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{B}_0},\ \hat{p}=\frac{p}{p_0}$$

$$\rho_0\mathrm{v}_A\hat{\rho}\left(\frac{1}{a_0/\mathrm{v}_A}\frac{\partial}{\partial\hat{t}}+\frac{\mathrm{v}_A}{a_0}\hat{\mathbf{u}}\cdot\hat{\nabla}\right)\hat{\mathbf{u}}=\frac{B_0{}^2}{a_0\mu_0}\left[\left(\hat{\nabla}\times\hat{\mathbf{B}}\right)\times\hat{\mathbf{B}}-\frac{p_0}{B_0{}^2/\mu_0}\hat{\nabla}\hat{p}\right]$$

$$\hat{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\hat{t}}+\hat{\mathbf{u}}\cdot\hat{\nabla}\right)\hat{\mathbf{u}}=\left(\hat{\nabla}\times\hat{\mathbf{B}}\right)\times\hat{\mathbf{B}}-2\beta\hat{\nabla}\hat{p}$$

$$\beta\equiv\frac{p_0}{B_0{}^2/2\mu_0}=\frac{\text{プラズマ圧力}}{\text{磁気圧}}$$

$\Downarrow$

MHD現象は、

圧力分布、磁場分布、β(ベータ値)が同じだと相似に振舞う

(ある装置でβが制限されると、それは装置サイズによらない)

熱･電磁流体物理特論@ES025, Thus.10:30~

0. イントロ

（MHD研究の意義;熱核融合発電炉の開発研究での位置づけ等）

1. MHD平衡特性、安定特性の粒子的描像と流体的描像の概説

2. 速度分布関数とは

3. 流体方程式と電磁流体方程式(MHD方程式)とは

4. MHD方程式に基づくプラズマのMHD平衡特性、安定特性の評価例

5. MHD研究のトピックス等

MHD平衡を決める式

ここでは、静止平衡状態を考える。静止平衡状態とは、プラズマの流速が0で、プラズマ諸量の時間変化がない状態を言う。
理想MHD方程式で、この条件を適用すると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0$$

$$\rho\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\right\}\mathbf{u} = \mathbf{j}\times\mathbf{B} - \nabla p$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B} = 0$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\right\}p + \gamma p\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0, (\text{初期条件})$$

→

$$0 + \nabla\cdot(\rho 0) = 0$$

$$\rho\{0 + 0\cdot\nabla\}0 = \mathbf{j}\times\mathbf{B} - \nabla p$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B} = 0$$

$$\{0 + 0\cdot\nabla\}p + \gamma p\nabla\cdot 0 = 0$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = 0 \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0, (\text{初期条件})$$

∴静止平衡状態が成り立つ条件は、

$$\boxed{\mathbf{j}\times\mathbf{B} = \nabla p, \nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}, \nabla\cdot\mathbf{B} = 0.}$$

$\mathbf{j}\times\mathbf{B} = \nabla p$ より、 $\boxed{\mathbf{B}\cdot\nabla p = 0}$ $\boxed{\mathbf{j}\cdot\nabla p = 0}$ →

等圧力面の法線ベクトルは、常に磁力線と直交。等圧面は磁気面と一致。
電流は等圧面に沿って流れる。

円柱プラズマのMHD平衡 (1)

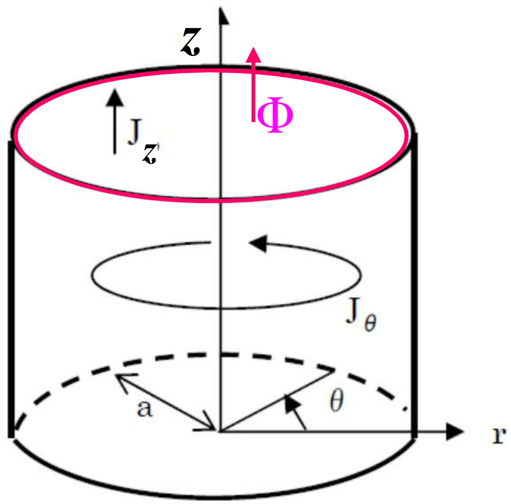
MHD平衡の式を円柱プラズマに適用する。円柱プラズマは、$\boldsymbol{B}, \boldsymbol{j}, p$が半径$r$だけに依存する。

$\mathbf{B} = B_r\mathbf{e}_r + B_\theta\mathbf{e}_\theta + B_z\mathbf{e}_z$ と仮定する。

$\mathbf{j}\times\mathbf{B} = \nabla p$ より、

$$\mathbf{B}\cdot\nabla p = 0 \Rightarrow B_r\frac{dp}{dr} = 0 \Rightarrow B_r = 0 \qquad \because p = p(r) \Rightarrow \nabla p = \mathbf{e}_r\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}$$

プラズマの作る磁束



円柱座標系(r,θ,z)

$\mathbf{j}\times\mathbf{B} = \nabla p$ と $\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}$ より、

$$(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} = \mu_0\nabla p$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left\{-\nabla\mathbf{B}^2 + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}\right\} = \mu_0\mathbf{e}_r\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\left\{-\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}^2}{\mathrm{d}r} - \frac{B_\theta{}^2}{r}\right\} = \mu_0\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}$$

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$$

$$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} = \left(A_r\frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r}\frac{\partial B_r}{\partial\theta} + A_z\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{A_\theta B_\theta}{r}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(A_r\frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial\theta} + A_z\frac{\partial B_\theta}{\partial z} + \frac{A_\theta B_r}{r}\right)\boldsymbol{e}_\theta + \left(A_r\frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r}\frac{\partial B_z}{\partial\theta} + A_z\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_z$$

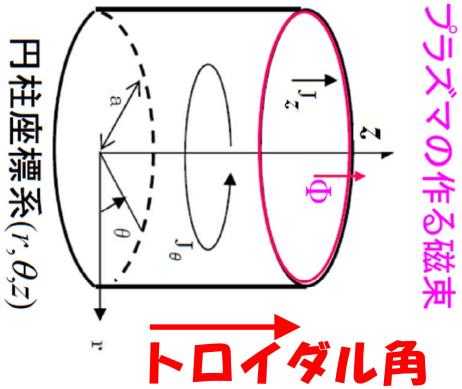
$$\Rightarrow \quad \mu_0\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(B_\theta{}^2 + B_z{}^2\right) - \frac{B_\theta{}^2}{r}\right\} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mu_0\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}B_z{}^2}{\mathrm{d}r} + \left(B_\theta\frac{\mathrm{d}B_\theta}{\mathrm{d}r} + \frac{B_\theta{}^2}{r}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \quad \mu_0\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}B_z{}^2}{\mathrm{d}r} + \frac{B_\theta}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rB_\theta) = 0$$

円柱プラズマのMHD平衡 (2)

$$\mu_0\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}B_z^{\,2}}{\mathrm{d}r}+\frac{B_\theta}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rB_\theta)=0$$

の両辺にr^2を掛けて、r方向に0~a(中心~境界)まで積分すると、



$$(\text{左辺第一項})=\int_0^a\mu_0\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}r^2\mathrm{d}r=\mu_0\left\{\left[pr^2\right]_0^a-2\int_0^a pr\mathrm{d}r\right\}=-2\mu_0\int_0^a pr\mathrm{d}r$$

$$(\text{左辺第二項})=\int_0^a\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}B_z^{\,2}}{\mathrm{d}r}r^2\mathrm{d}r=\left[\frac{B_z^{\,2}}{2}r^2\right]_0^a-\int_0^a B_z^{\,2}r\mathrm{d}r=\frac{a^2B_{za}^{\,2}}{2}-\int_0^a B_z^{\,2}r\mathrm{d}r$$

$$(\text{左辺第三項})=\int_0^a\frac{B_\theta}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rB_\theta)r^2\mathrm{d}r=\left[\frac{(rB_\theta)^2}{2}\right]_0^a=\frac{(aB_{\theta a})^2}{2}=\frac{(\mu_0I_Z/2\pi)^2}{2}$$

$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{j}$ より、

$$\boxed{2\pi aB_{\theta a}=\mu_0\int\mathbf{j}dS \Rightarrow \mu_0I_z}$$

プラズマ中のz方向の磁場をB_{za}、これとプラズマの外の磁場の差をΔB_z ($|\Delta B_z|<<|B_{za}|$) とすると、左辺第二項の積分部は、

$$-\int_0^a B_z^{\,2}r\mathrm{d}r=-\int_0^a(B_{za}+\Delta B_z)^2r\mathrm{d}r\sim-\int_0^a\left(B_{za}^{\,2}+2B_{za}\Delta B_z\right)r\mathrm{d}r$$

$$=-B_{za}^{\,2}\int_0^a r\,\mathrm{d}r-2B_{za}\int_0^a\Delta B_zr\mathrm{d}r=-\frac{a^2B_{za}^{\,2}}{2}-2B_{za}\,\Delta\Phi/2\pi$$

$$\boxed{\Phi_a\equiv\pi a^2B_{za}}$$

$$2\mu_0\int_0^a pr\mathrm{d}r+\frac{B_{za}\Delta\Phi}{\pi}-\frac{a^2B_{\theta a}^{\,2}}{2}=0\qquad\Delta\Phi=-\frac{1}{2}\frac{2\int_0^a pr\mathrm{d}r\big/a^2}{B_{za}^{\,2}\big/2\mu_0}B_{za}a^2\pi+\frac{(\mu_0I_z/2\pi)^2}{2B_{za}/\pi}$$

半径a, 長さ$2\pi R_0$の円柱プラズマの体積Vは、

$$\int_0^a r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi R_0}\mathrm{d}z=2\pi^2R_0a^2$$

円柱プラズマ中の総圧力は、$\int_0^a pr\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi R_0}\mathrm{d}z$

$$=4\pi^2R_0\int_0^a pr\mathrm{d}r$$

$$\therefore\langle p\rangle\equiv\int_0^a pr\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi R_0}\mathrm{d}z$$

$$=2\int_0^a pr\mathrm{d}r\big/a^2$$

$$\boxed{\Delta\Phi=-\frac{1}{2}\langle\beta\rangle\Phi_a+\frac{(\mu_0I_z)^2}{8\Phi_a/a^2}}$$

$\Delta\Phi$とI_zを計測し、B_{za}を精度よく評価できれば、β値(総圧力値)が求まる。

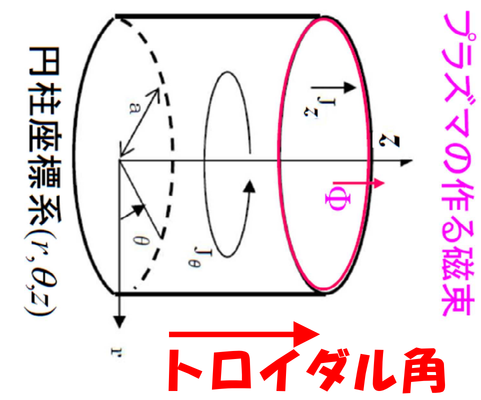
$$\Delta\Phi\equiv\int_0^a\Delta B_zr\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta$$
$$=2\pi\int_0^a\Delta B_zr\mathrm{d}r$$

円柱プラズマのMHD平衡 (3)

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi_a} = -\frac{1}{2}\langle\beta\rangle + \frac{1}{8}\left(\frac{\mu_0 a I_z}{\Phi_a}\right)^2$$

$$\Phi_a \equiv \pi a^2 B_{za} \qquad \Delta\Phi \equiv 2\pi\int_0^a \Delta B_z r\mathrm{d}r$$

$$2\pi a B_{\theta a} = \mu_0 I_z$$



$\Delta\Phi$とI_zを計測し、B_{za}を精度よく評価できれば、β値(総圧力値)が求まる。

$$\frac{1}{8}\left(\frac{\mu_0 a I_z}{\Phi_a}\right)^2 = \frac{1}{8}\left(\frac{2\pi a^2 B_{\theta a}}{\pi a^2 B_{za}}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{B_{\theta a}}{B_{za}}\right)^2 \sim \frac{1}{2}\left(\frac{a}{R_0}\right)^2\left(\frac{1}{q_a}\right)^2$$

ヘリカル装置では、I_p~0なので、ΔΦ<0=> 反磁性。

トカマクでは、プラズマ圧力が低いと、ΔΦ>0=> 常磁性。

$$\frac{a}{R_0} \sim \frac{1}{4}, q_a \sim 4 \Rightarrow \frac{1}{8}\left(\frac{\mu_0 a I_z}{\Phi_a}\right)^2 \sim 0.03$$

<β> > 6%で反磁性。

プラズマリングの平衡 III

再掲

したがって、プラズマリングにかかる大半径外側に広がる力の合計は、

$$\mathbf{F}_{hoop}+\mathbf{F}_{p}+\mathbf{F}_{B}=\frac{\mu_0 I_p{}^2}{2}\left(\ln\frac{8R}{a}+\frac{l_i}{2}-1\right)+2\pi^2a^2\overline{p}+\frac{\pi^2a^2\left(B_e{}^2-\overline{B}_i{}^2\right)}{\mu_0}$$

プラズマ境界での力のつり合いより　$\overline{p}+\dfrac{\overline{B}_i^2}{2\mu_0}=\dfrac{B_{ep}{}^2}{2\mu_0}+\dfrac{B_e{}^2}{2\mu_0}$

$$=>\frac{\mu_0 I_p{}^2}{2}\left(\ln\frac{8R}{a}+\frac{l_i}{2}-1\right)+2\pi^2a^2\overline{p}+2\pi^2a^2\left(\overline{p}-\frac{B_{pe}{}^2}{2\mu_0}\right)$$

$\beta_p\equiv\dfrac{\overline{p}}{B_{ep}{}^2/2\mu_0}$ と定義し、 $2\pi aB_{pe}=\mu_0 I_p$ を使うと、

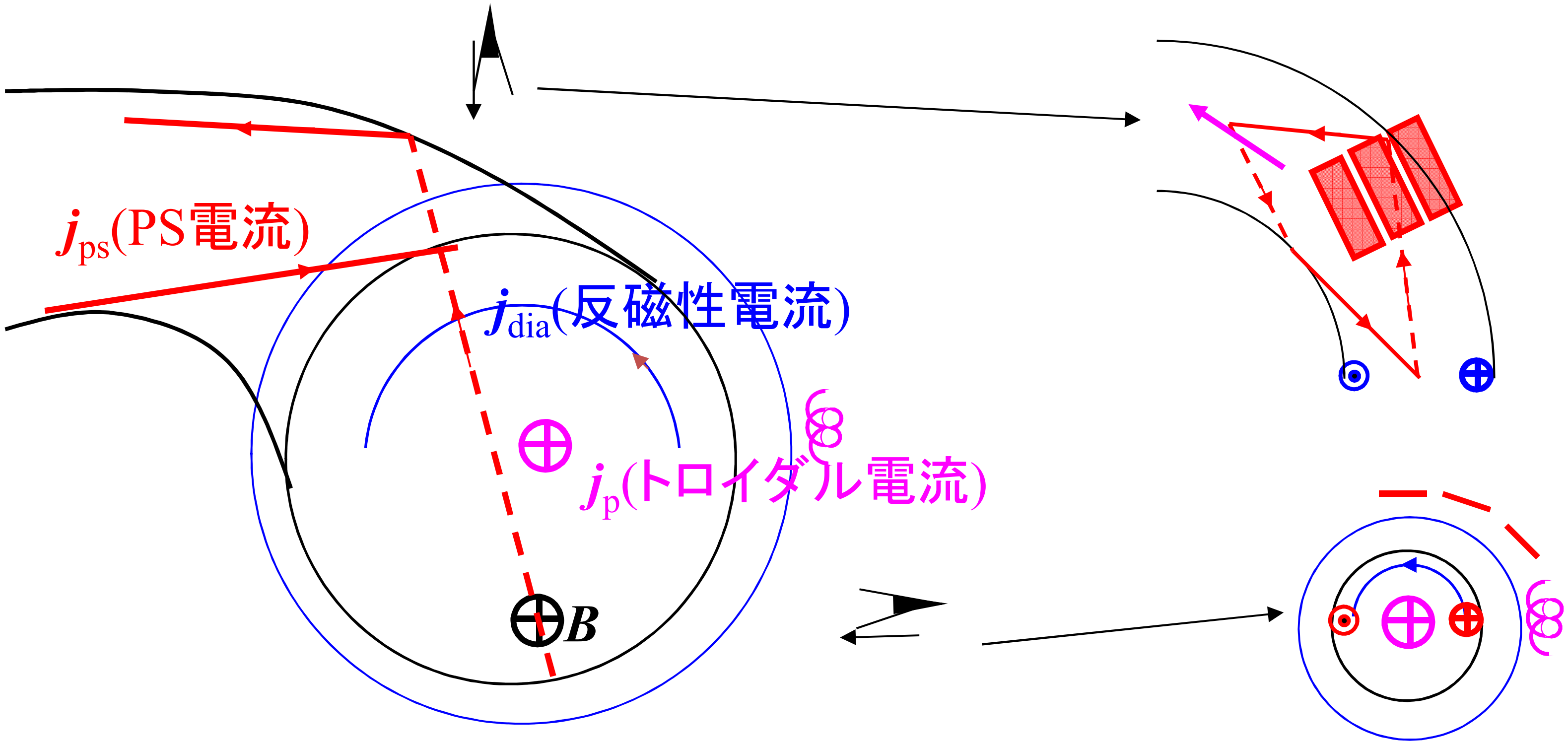
$$=>\frac{\mu_0 I_p{}^2}{2}\left(\ln\frac{8R}{a}+\frac{l_i}{2}-1+\frac{\beta_p}{2}+\frac{\beta_p}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$\boxed{\mathbf{F}_{hoop}+\mathbf{F}_{p}+\mathbf{F}_{B}+2\pi RI_pB_V=0}$ より、平衡に必要な垂直磁場は

$$\boxed{B_V=-\frac{\mu_0 I_p}{4\pi R}\left(\ln\frac{8R}{a}+\frac{l_i}{2}-\frac{3}{2}+\beta_p\right)}$$

磁場計測によるプラズマ電流計測　　おまけ

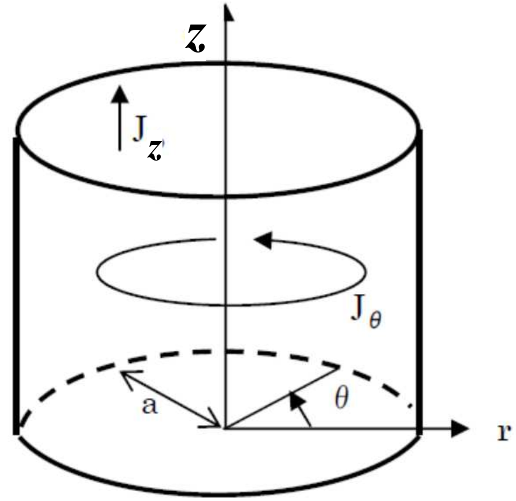
磁場計測:
プラズマ中を流れる電流で誘起される磁場を計測する。



各種電流でどんな磁場が誘起されるか?
その磁場を測るためのコイル形状は??

円柱プラズマのMHD平衡 (4)

次に、具体的な円柱プラズマの平衡磁場、圧力を評価してみる。ここでは、θ方向の磁場だけがある場合($\boldsymbol{B}$=(0, $B_\theta(r)$, 0))を例として取り上げる。



円柱座標系(r,θ,z)

円柱プラズマのMHD平衡 (1)のレジメより、

$$\mu_0 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} + \frac{B_\theta}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rB_\theta) = 0$$

左式の圧力を閉じ込めるための磁場、電流分布が分かる。

$\boxed{p(r) = p_0 a^4 \left(r^2 + a^2\right)^{-2}}$ の場合を考える。

$$rB_\theta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rB_\theta) = -\mu_0 r^2 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} \Rightarrow (rB_\theta)^2 = -\mu_0 \int r^2 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r$$ より、

$$(rB_\theta)^2 = -\mu_0 \int r^2 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r \qquad s \equiv r^2$$

$$\frac{1}{p_0 a^4}\int r^2 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r = \int \frac{-4r^3}{\left(r^2+a^2\right)^3}\mathrm{d}r = -2\int \frac{s}{\left(s+a^2\right)^3}\mathrm{d}s = -2\int\left(\frac{1}{\left(s+a^2\right)^2} - \frac{a^2}{\left(s+a^2\right)^3}\right)\mathrm{d}s = -2\left[\frac{-1}{s+a^2} + \frac{a^2}{2\left(s+a^2\right)^2}\right] = \frac{2s+a^2}{\left(s+a^2\right)^2} + C$$

$\left.(rB_\theta)^2\right|_{r=0} = 0$より、 $C = -\dfrac{1}{a^2}$.

$$(rB_\theta)^2 = -\mu_0 p_0 a^4 \left(\frac{2s+a^2}{\left(s+a^2\right)^2} - \frac{1}{a^2}\right) = \mu_0 \frac{p_0 a^4 r^4}{\left(r^2+a^2\right)^2}$$

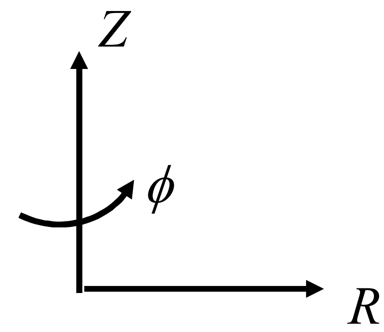
$$rB_\theta = \frac{\sqrt{\mu_0 p_0}\, a^2 r^2}{r^2+a^2} \qquad \boxed{B_\theta = \frac{\sqrt{\mu_0 p_0}\, a^2 r}{r^2+a^2}}$$

$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$より、 $\mu_0 j_z = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rB_\theta)$ $\boxed{j_z = \sqrt{\dfrac{p_0}{\mu_0}}\dfrac{2a^4}{\left(r^2+a^2\right)^2}}$

z方向の電流でプラズマを閉じ込めるので、zピンチと呼ばれる。

Grad-Shafranov方程式 (1)

$$\boxed{\mathbf{j}\times\mathbf{B}=\nabla p \quad (1), \nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{j} \quad (2), \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \quad (3).}$$



円筒座標系(R, ϕ, Z)を考える。また、トロイダル方向に対称性がある(回転対称、軸対称)場合を考える。(3)式と、軸対称性より、

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RB_R)+\cancel{\frac{1}{R}\frac{\partial B_\phi}{\partial \phi}}+\frac{\partial B_Z}{\partial Z}=0 \quad \Rightarrow R\frac{\partial B_Z}{\partial Z}=-\frac{\partial}{\partial R}(RB_R) \qquad B_\phi=B_\phi(R,Z)$$

$$\therefore 関数\Psi を導入して、B_R=-\frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial Z}, \quad B_Z=\frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial R}$$

$$\nabla\Psi=\frac{\partial \Psi}{\partial R}\mathbf{e}_R+\frac{\partial \Psi}{\partial Z}\mathbf{e}_Z に注意すると、\nabla\Psi\times\mathbf{e}_\phi=\frac{\partial \Psi}{\partial R}\mathbf{e}_R\times\mathbf{e}_\phi+\frac{\partial \Psi}{\partial Z}\mathbf{e}_Z\times\mathbf{e}_\phi=-\frac{\partial \Psi}{\partial Z}\mathbf{e}_R+\frac{\partial \Psi}{\partial R}\mathbf{e}_Z$$

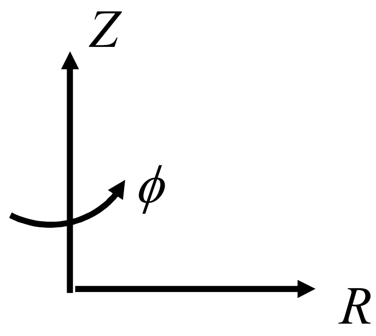
$$\therefore \nabla\Psi\times\mathbf{e}_\phi=R(B_R\mathbf{e}_R+B_Z\mathbf{e}_Z) \Rightarrow \boxed{\mathbf{B}=\frac{1}{R}\nabla\Psi\times\mathbf{e}_\phi+B_\phi\mathbf{e}_\phi}$$

$$ここで、B_Z=\frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial R} より、\Psi=\int_0^R B_Z R\mathrm{d}R$$

$\Rightarrow$ Z=const.面上の半径Rの円内を通過する磁束の$1/2\pi$.
ポロイダル磁束$/2\pi$

Grad-Shafranov方程式 (2)

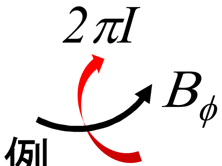
$\boxed{(2)\text{より}, \nabla\cdot\mathbf{j}=0 \quad (4).}$ Bと同様に考え、Iを導入すると



$$j_R = -\frac{1}{R}\frac{\partial I}{\partial Z}, \quad j_Z = \frac{1}{R}\frac{\partial I}{\partial R}, \quad j_\phi = j_\phi(R,Z)$$

(2)式のZ成分は、

$$(\nabla\times\mathbf{B})_Z = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RB_\phi) - \frac{1}{R}\cancel{\frac{\partial B_R}{\partial \phi}} = \mu_0 j_Z = \frac{\mu_0}{R}\frac{\partial I}{\partial R} \qquad \Rightarrow \quad RB_\phi = \mu_0 I$$



IはB_ϕを作る電流値に比例。
ある磁気面の外側のポロイダル電流値/2π.

Bと(1)に(2)を代入すると、

$$(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} = \mu_0\nabla p$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = -\frac{\partial B_\phi}{\partial Z}\mathbf{e}_R + \left(\frac{\partial B_R}{\partial Z} - \frac{\partial B_Z}{\partial R}\right)\mathbf{e}_\phi + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RB_\phi)\mathbf{e}_Z = -\frac{\partial B_\phi}{\partial Z}\mathbf{e}_R + \left(-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Psi}{\partial Z^2} - \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Psi}{\partial R^2}\right)\right)\mathbf{e}_\phi + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RB_\phi)\mathbf{e}_Z$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial Z^2} + R\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Psi}{\partial R^2}\right)\right) \equiv -\frac{1}{R}\Delta^*\Psi$$

$\mathbf{B} = -\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial Z}\mathbf{e}_R + B_\phi\mathbf{e}_\phi + \frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R}\mathbf{e}_Z$なので、 $(\nabla\times\mathbf{B})$と$\mathbf{B}$の外積をとると、

Grad-Shafranov方程式 (3)

$$\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)\times\mathbf{B}=\mu_0\nabla p$$

$\mathbf{e}_R;$
$$-\frac{1}{R^2}\Delta^*\Psi\frac{\partial\Psi}{\partial R}-\frac{B_\phi}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(RB_\phi\right)=\mu_0\frac{\partial p}{\partial R}\qquad -\frac{1}{R^2}\Delta^*\Psi\frac{\partial\Psi}{\partial R}-\frac{{\mu_0}^2 I}{R^2}\frac{\partial I}{\partial R}=\mu_0\frac{\partial p}{\partial R}$$

$\mathbf{e}_\phi;$
$$-\frac{1}{R^2}\frac{\partial\Psi}{\partial Z}\frac{\partial}{\partial R}\left(RB_\phi\right)+\frac{1}{R}\frac{\partial B_\phi}{\partial Z}\frac{\partial\Psi}{\partial R}=0\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial Z}\frac{\partial}{\partial R}\left(RB_\phi\right)-\frac{\partial}{\partial Z}\left(RB_\phi\right)\frac{\partial\Psi}{\partial R}=0\qquad \frac{\partial\left(\Psi,RB_\phi\right)}{\partial\left(R,Z\right)}=0$$

$\mathbf{e}_Z;$
$$-B_\phi\frac{\partial B_\phi}{\partial Z}-\frac{1}{R^2}\Delta^*\Psi\frac{\partial\Psi}{\partial Z}+=\mu_0\frac{\partial p}{\partial Z}\qquad -\frac{{\mu_0}^2 I}{R^2}\frac{\partial I}{\partial Z}-\frac{1}{R^2}\Delta^*\Psi\frac{\partial\Psi}{\partial Z}+=\mu_0\frac{\partial p}{\partial Z}$$

ϕ成分の式より、$RB_\phi=\mu_0 I$は、Ψと一次従属。 $\boxed{I=I\left(\Psi\right)}$ $\quad\therefore\frac{\partial I}{\partial R}=\frac{\partial\Psi}{\partial R}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Psi},\frac{\partial I}{\partial Z}=\frac{\partial\Psi}{\partial Z}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Psi}$

したがって、R, Z成分の式は、

$$-\frac{1}{R^2}\Delta^*\Psi\frac{\partial\Psi}{\partial R}-\frac{{\mu_0}^2}{2R^2}\frac{\partial\Psi}{\partial R}\frac{\mathrm{d}I^2}{\mathrm{d}\Psi}=\mu_0\frac{\partial p}{\partial R}\qquad -\frac{{\mu_0}^2}{2R^2}\frac{\partial\Psi}{\partial Z}\frac{\mathrm{d}I^2}{\mathrm{d}\Psi}-\frac{1}{R^2}\Delta^*\Psi\frac{\partial\Psi}{\partial Z}+=\mu_0\frac{\partial p}{\partial Z}$$

$$-\frac{1}{R^2}\frac{\partial\Psi}{\partial R}\left(\Delta^*\Psi+\frac{{\mu_0}^2}{2}\frac{\mathrm{d}I^2}{\mathrm{d}\Psi}\right)=\mu_0\frac{\partial p}{\partial R}\qquad -\frac{1}{R^2}\frac{\partial\Psi}{\partial Z}\left(\Delta^*\Psi+\frac{{\mu_0}^2}{2}\frac{\mathrm{d}I^2}{\mathrm{d}\Psi}\right)=\mu_0\frac{\partial p}{\partial Z}$$

$j_\phi B_z-j_z B_\phi=\partial p/\partial p$より、

$$Rj_\phi=\frac{{\mu_0}^2}{2}\frac{\mathrm{d}I^2}{\mathrm{d}\Psi}+\mu_0 R^2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\Psi}$$

$$\mu_0\frac{\partial p}{\partial Z}\frac{\partial\Psi}{\partial R}=\mu_0\frac{\partial p}{\partial R}\frac{\partial\Psi}{\partial Z}\qquad \frac{\partial\left(\Psi,p\right)}{\partial\left(R,Z\right)}=0\qquad \boxed{p=p\left(\Psi\right)}$$

$$-\frac{1}{R^2}\Delta^*\Psi\frac{\partial\Psi}{\partial R}-\frac{1}{2R^2}\frac{\partial\Psi}{\partial R}\frac{\mathrm{d}I^2}{\mathrm{d}\Psi}=\mu_0\frac{\partial\Psi}{\partial R}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\Psi}$$

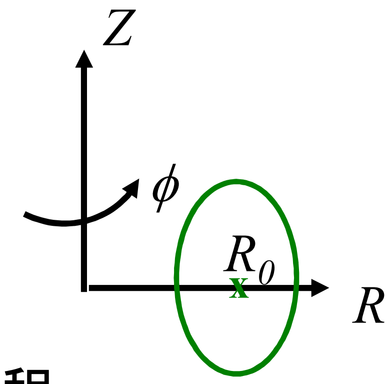
$$\boxed{\Delta^*\Psi=-\frac{{\mu_0}^2}{2}\frac{\mathrm{d}I^2}{\mathrm{d}\Psi}-\mu_0 R^2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\Psi}}$$

Grad-Shafranov方程式

$\Psi=\Psi(R,Z)$に関する2階の偏微分方程式
境界条件を2個、I, pをΨの関数として与えれば、解が求まる。

Grad-Shafranov方程式 (4)

Grad-Shafranov方程式の解の例を考えてみる。



$$I^2 = I_0{}^2 - \frac{2bR_0{}^2}{\mu_0}\Psi$$
$$p = \frac{a}{\mu_0}(\Psi_a - \Psi)$$

I_0は Ψ=0の時のI. Ψ_aはプラズマ圧力が0になる(プラズマ境界)での Ψ.

とし、$\Psi(R_0,0)=0$、ΨはZの偶関数とすると、Grad-Shafranov方程式の解は、以下のように解析的に表せる。 [L.S.Solov'ev: Soviet Phys.-JETP 26(1968)400]

$$\Psi = \frac{1}{8}(a-c)\left(R^2 - R_0{}^2\right)^2 + \left(bR_0{}^2 + cR^2\right)\frac{Z^2}{2}$$

cはプラズマ境界で上式を満たす定数

$$\Psi_a = \frac{1}{8}(a-c)\left(R_a{}^2 - R_0{}^2\right)^2 + \left(bR_0{}^2 + cR_a{}^2\right)\frac{Z_a{}^2}{2}$$

$R \sim R_0$, $Z \sim 0$の時、

$$\Psi \sim \frac{R_0{}^2}{2}\left\{(a-c)\left(R^2 - R_0{}^2\right) + (b+c)Z^2\right\}$$

なので、Ψの等高線(磁気面の形)は、楕円度$\sqrt{(a-c)/(b+c)}$ の楕円。

∵ $\nabla\Psi$は常に磁力線に垂直=>磁気面に垂直=> Ψの等高面は磁気面と平行。

$$B_R \sim -\frac{2ZR_0{}^2}{R}(b+c), \quad B_Z = 2R_0{}^2(a-c), \quad B_\phi = I/\mu_0 R$$

$$\mathbf{B} = -\frac{2ZR_0{}^2}{R}(b+c)\mathbf{e}_R + \frac{I}{\mu_0 R}\mathbf{e}_\phi + 2R_0{}^2(a-c)\mathbf{e}_Z.$$

$\Psi = \Psi(R,Z)$が求まれば、R-Z平面上での磁気面の形、圧力分布の形、電流の形、磁場の表式がわかる。

MHD平衡特性 Advanced

Starting from MHD equil. eq.

$$\mathbf{j}\times\mathbf{B}=\nabla p,\quad \nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{j},\quad \nabla\cdot\mathbf{B}=0.$$

$$\mathbf{j}-j_{//}\frac{\mathbf{B}}{B}\equiv\mathbf{j}_\perp=\frac{\mathbf{B}\times\nabla p}{B^2},$$
$$\nabla\cdot\mathbf{j}=\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{B})=0.$$

$$\mathbf{B}\cdot\nabla p=0,\quad \mathbf{j}\cdot\nabla p=0.$$

1. Mag. field line and current lie on contour of pressure.
2. Contours of pressure coincide with mag. surfaces.

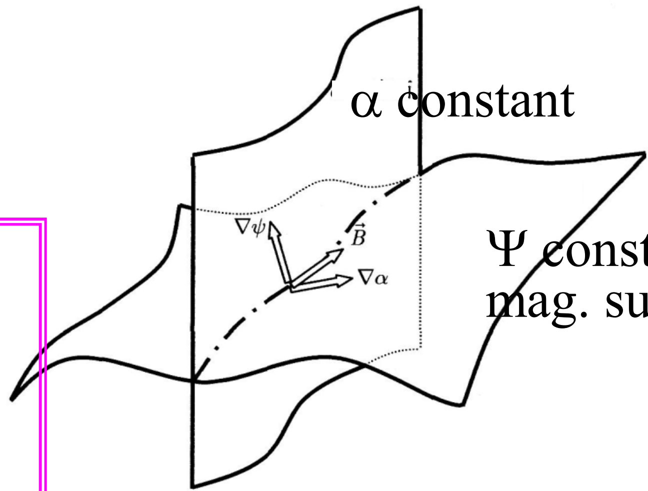
$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$

=> $\mathbf{B}=\nabla\psi\times\nabla\alpha$

(Clebsh expression)

$$\mathbf{B}\cdot\nabla\psi=0,\quad \mathbf{B}\cdot\nabla\alpha=0$$

1. Both $\nabla\Psi$ and $\nabla\alpha$ are orthogonal to mag. field line.
2. When contour of Ψ is defined by mag. surface, a=constat on mag. surf. denotes magnetic field line.



熱・電磁流体物理特論@ES025, Thus.10:30~

0. イントロ
（MHD研究の意義;熱核融合発電炉の開発研究での位置づけ等）

1. MHD平衡特性、安定特性の粒子的描像と流体的描像の概説

2. 速度分布関数とは

3. 流体方程式と電磁流体方程式(MHD方程式)とは

4. MHD方程式に基づくプラズマのMHD平衡特性、安定特性の評価例

5. MHD研究のトピックス等

MHD不安定性を決める式

ここでは、静止平衡状態($\mathbf{u}_0$=0)が成り立っていた時に、摂動(小さな変化)が生ずると、その変化量がさらに大きくなる(不安定)のか、小さくなる(安定)のか、変わらない(安定)かで、プラズマの不安定性を評価する。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right\} \mathbf{u} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j}$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right\} p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, (\text{初期条件})$$

 # MHD方程式

摂動を仮定し、その変化を調べるために、摂動法を適用する。

摂動法(物理量を時間変化しない大きな量と時間変化するが量が小さい摂動量に分けて、現象を考える)

この時、大きな量は大きな量同士でバランスし、小さい量や時間変化する量はそれぞれでバランスすると仮定する=>**ordering**

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_1(\mathbf{r},t), \ \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) = 0,$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \mathbf{j}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_1(\mathbf{r},t), \ |\mathbf{j}_1| << |\mathbf{j}_0|,$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_1(\mathbf{r},t), \ |\mathbf{B}_1| << |\mathbf{B}_0|,$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_1(\mathbf{r},t), \ \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = 0,$$

$$\rho(\mathbf{r},t) = \rho_0(\mathbf{r}) + \rho_1(\mathbf{r},t), \ \rho_1 << \rho_0,$$

$$p(\mathbf{r},t) = p_0(\mathbf{r}) + p_1(\mathbf{r},t), \ p_1 << p_0.$$

MHD方程式と線形化 (I)

orderingすると、

0次(order)の式

$$\frac{\cancel{\partial\rho_0}}{\cancel{\partial t}}+\nabla\cdot(\rho_0\cancel{\mathbf{u}_0})=0$$

$$\rho_0\left\{\frac{\cancel{\partial}}{\cancel{\partial t}}+\cancel{\mathbf{u}_0}\cdot\nabla\right\}\cancel{\mathbf{u}_0}=\underline{\underline{\mathbf{j}_0\times\mathbf{B}_0-\nabla p_0}}$$

$$\mathbf{E}_0+\cancel{\mathbf{u}_0}\times\mathbf{B}_0=0$$

$$\left\{\frac{\cancel{\partial}}{\cancel{\partial t}}+\cancel{\mathbf{u}_0}\cdot\nabla\right\}p_0+\gamma p_0\nabla\cdot\cancel{\mathbf{u}_0}=0$$

$$\underline{\underline{\nabla\times\mathbf{B}_0=\mu_0\mathbf{j}_0,}}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}_0=-\frac{\cancel{\partial\mathbf{B}_0}}{\partial t}$$

=> 平衡の式

高次(order)の式

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_0\mathbf{u}_1)+\nabla\cdot(\rho_1\cancel{\mathbf{u}_0})+\nabla\cdot(\rho_1\mathbf{u}_1)=0,$$

$$\rho_0\left\{\frac{\cancel{\partial}}{\cancel{\partial t}}+\mathbf{u}_1\cdot\nabla\right\}\cancel{\mathbf{u}_0}+\rho_0\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\cancel{\mathbf{u}_0}\cdot\nabla\right\}\mathbf{u}_1+\rho_1\left\{\frac{\cancel{\partial}}{\cancel{\partial t}}+\mathbf{u}_1\cdot\nabla\right\}\cancel{\mathbf{u}_0}$$
$$=\mathbf{j}_1\times\mathbf{B}_0+\mathbf{j}_0\times\mathbf{B}_1+\mathbf{j}_1\times\mathbf{B}_1-\nabla p_1$$

$$\mathbf{E}_1+\cancel{\mathbf{u}_0}\times\mathbf{B}_1+\mathbf{u}_1\times\mathbf{B}_0+\mathbf{u}_1\times\mathbf{B}_1=0$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\cancel{\mathbf{u}_0}\cdot\nabla+\mathbf{u}_1\cdot\nabla\right\}p_1+\left\{\frac{\cancel{\partial}}{\cancel{\partial t}}+\mathbf{u}_1\cdot\nabla\right\}p_0$$
$$+\gamma p_0\nabla\cdot\mathbf{u}_1+\gamma p_1\nabla\cdot\cancel{\mathbf{u}_0}+\gamma p_1\nabla\cdot\mathbf{u}_1=0$$

$$\nabla\times\mathbf{B}_1=\mu_0\mathbf{j}_1,$$

$$\nabla\times\mathbf{E}_1=-\frac{\partial\mathbf{B}_1}{\partial t}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbf{u}(\mathbf{r},t)=\mathbf{u}_0(\mathbf{r})+\mathbf{u}_1(\mathbf{r},t),\ \mathbf{u}_0(\mathbf{r})=0,\\&\mathbf{j}(\mathbf{r},t)=\mathbf{j}_0(\mathbf{r})+\mathbf{j}_1(\mathbf{r},t),\ |\mathbf{j}_1|<<|\mathbf{j}_0|,\\&\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mathbf{B}_0(\mathbf{r})+\mathbf{B}_1(\mathbf{r},t),\ |\mathbf{B}_1|<<|\mathbf{B}_0|,\\&\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0(\mathbf{r})+\mathbf{E}_1(\mathbf{r},t),\ \mathbf{E}_0(\mathbf{r})=0,\\&\rho(\mathbf{r},t)=\rho_0(\mathbf{r})+\rho_1(\mathbf{r},t),\ \rho_1<<\rho_0,\\&p(\mathbf{r},t)=p_0(\mathbf{r})+p_1(\mathbf{r},t),\ p_1<<p_0.\end{aligned}}$$

MHD方程式と線形化 (II)

高次(order)の式

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_0 \mathbf{u}_1) + \nabla\cdot(\rho_1 \mathbf{u}_1) = 0,$$

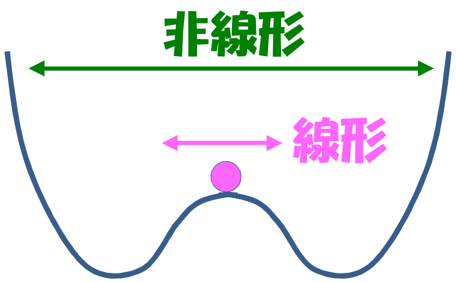
$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}_1 = \mathbf{j}_1\times\mathbf{B}_0 + \mathbf{j}_0\times\mathbf{B}_1 + \mathbf{j}_1\times\mathbf{B}_1 - \nabla p_1$$

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_1\times\mathbf{B}_0 + \mathbf{u}_1\times\mathbf{B}_1 = 0$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1\cdot\nabla p_1 + \mathbf{u}_1\cdot\nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla\cdot\mathbf{u}_1 + \gamma p_1 \nabla\cdot\mathbf{u}_1 = 0$$

$$\nabla\times\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{j}_1,$$

$$\nabla\times\mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}$$



線形化すると、

非線形項(1次の量同士の積)は十分小さいと仮定

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_0 \mathbf{u}_1) = 0,$$

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}_1 = \mathbf{j}_1\times\mathbf{B}_0 + \mathbf{j}_0\times\mathbf{B}_1 - \nabla p_1$$

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_1\times\mathbf{B}_0 = 0$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1\cdot\nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla\cdot\mathbf{u}_1 = 0$$

$$\nabla\times\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{j}_1,$$

$$\nabla\times\mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}$$

=> 不安定解析の基礎式

MHD方程式と線形化 (III)

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_0 \mathbf{u}_1) = 0,$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_1 - \nabla p_1$$

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0 = \eta \mathbf{j}_1$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla\cdot \mathbf{u}_1 = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{j}_1,$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{j}_1}{\partial t} \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{j}_0 \times \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \mathbf{B}_1 - \nabla \frac{\partial p_1}{\partial t}$$

$$\nabla \times \partial \mathbf{B}_1/\partial t = \mu_0\, \partial \mathbf{j}_1/\partial t,$$

$$\nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0 - \eta \mathbf{j}_1) = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \qquad -\frac{\partial p_1}{\partial t} = \mathbf{u}_1 \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{E}_1 = -\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0 + \eta \mathbf{j}_1 \qquad \nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}$$

まとめると、

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} = \nabla\{\mathbf{u}_1 \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1\} + \mathbf{j}_0 \times \{\nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0 - \eta \mathbf{j}_1)\} + \frac{1}{\mu_0}[\nabla \times \{\nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0)\}] \times \mathbf{B}_0.$$

式の物理的描像の明確化のため、変位ベクトル $\xi;(\partial \xi/\partial t = \mathbf{u}_1)$ を導入すると

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathbf{F}(\xi), \qquad \mathbf{F}(\xi) \equiv \nabla(\xi \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \xi) + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{Q} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{B}_0.$$

ここで、$\mathbf{Q} \equiv \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0)$.

$\eta = 0$を仮定。

$\eta \neq 0$の場合は、 $\nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0 - \eta \mu_0 \nabla \times \mathbf{B}_1) = -\dfrac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}$

と、同時に解く必要あり。

MHD方程式と線形化　(IV)

$\eta \neq 0$の場合は、

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} = \nabla\left\{\mathbf{u}_1 \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1\right\} + \mathbf{j}_0 \times \left\{\nabla \times \left(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0 - \frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_1\right)\right\} + \frac{1}{\mu_0}\left[\nabla \times \left\{\nabla \times \left(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0\right)\right\}\right] \times \mathbf{B}_0.$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times \left(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0 - \eta \mu_0 \nabla \times \mathbf{B}_1\right)$$

を、同時に解く必要あり。

$\rho_1, p_1, \mathbf{E}_1$は、$\mathbf{u}_1, \mathbf{B}_1$と平衡量から求まる。

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho_0 \mathbf{u}_1\right) = 0, \qquad \frac{\partial p_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}$$

$\eta = 0$の場合は、

$\rho_1, p_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1$は、$\boldsymbol{\xi}_1$と平衡量から求まる。

$$p_1 = -\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} \qquad \mathbf{B}_1 = \nabla \times \left(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0\right) \qquad \rho_1 = -\nabla \cdot \left(\rho_0 \boldsymbol{\xi}_1\right) \qquad \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \times \mathbf{B}_0$$

MHD方程式と線形化 (V)

線形の安定特性を調べるために、微小物理量の時間変化は，以下のような指数的な依存性をもつと仮定すると、前ページの式は以下のように変形できる。

$$\xi(\mathbf{r},t)=\xi_{\omega}(\mathbf{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t).$$

$$\rho_0\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\mathbf{F}(\xi), \qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=>(-i\omega)^2\xi$$

$$-\rho_0\omega^2\xi=\mathbf{F}(\xi).$$

考察する系全体についての運動を考えて積分すると

$$\frac{1}{2}\rho_0\omega^2\int \mathrm{d}V\xi^*\xi=-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}V\xi^*\mathbf{F}(\xi)=>\mathrm{K}\equiv\frac{1}{2}\rho_0\int \mathrm{d}V\xi^*\xi,\ \delta\mathrm{W}\equiv-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}V\xi^*\mathbf{F}(\xi).$$

$$=>\omega^2\mathrm{K}=\delta\mathrm{W}.$$

$$=>\omega^2=\frac{\delta\mathrm{W}}{\mathrm{K}}.$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}\equiv\mathbf{u}_1$$

ξ^*;ξの複素共役

左辺がプラズマの運動エネルギーの時間変化に対応、右辺がプラズマの位置エネルギーの変化に対応することがわかる。
また、ωが虚数だと変位ベクトルの絶対値が増加するので，δWが負が不安定の条件であることがわかる。

MHD方程式と線形化　(I-V)

線形化すると、

非線形項(1次の量同士の積)は十分小さいと仮定

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathbf{F}(\xi),$$

$\xi;(\partial \xi / \partial t = \mathbf{u}_1)$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}_1) = 0,$$

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}_1 = \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_1 - \nabla p_1$$

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0 = 0$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{j}_1,$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}$$

=> 不安定解析の基礎式

$$\mathbf{F}(\xi) \equiv \nabla(\xi \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \xi) + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{Q} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0.$$

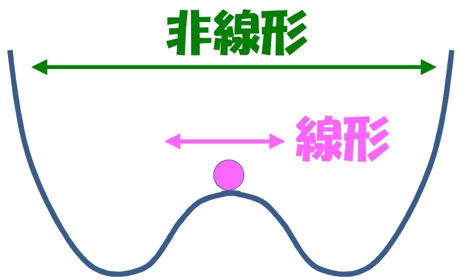
$$p_1 = -\xi \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \xi \qquad \mathbf{B}_1 = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0)$$

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \xi_\omega(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t).$$

$$\frac{1}{2}\rho_0 \omega^2 \int \mathrm{d}V \xi^* \xi = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}V \xi^* \mathbf{F}(\xi)$$

$$=> \mathrm{K} \equiv \frac{1}{2}\rho_0 \int \mathrm{d}V \xi^* \xi, \quad \delta \mathrm{W} \equiv -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}V \xi^* \mathbf{F}(\xi).$$

$$=> \omega^2 \mathrm{K} = \delta \mathrm{W}. => \omega^2 = \frac{\delta \mathrm{W}}{\mathrm{K}}.$$



また、ωが虚数だと変位ベクトルの絶対値が増加するので, δWが負が不安定の条件であることがわかる。

MHD方程式と線形化 (VI)

プラズマの位置エネルギーを書き下してみる。

$$\delta W = \frac{1}{2}\int \xi\cdot\mathbf{F}(\xi)dV \equiv \frac{1}{2}\int \xi\cdot\nabla(\xi\cdot\nabla p_0+\gamma p_0\nabla\cdot\xi)dV + \frac{1}{2\mu_0}\int \xi\cdot(\nabla\times\mathbf{B}_0)\times\mathbf{Q}dV + \frac{1}{2\mu_0}\int \xi\cdot(\nabla\times\mathbf{Q})\times\mathbf{B}_0 dV.$$

$$\int \xi\cdot\nabla(\xi\cdot\nabla p_0+\gamma p_0\nabla\cdot\xi)dV = \int_S(\xi\cdot\nabla p_0+\gamma p_0\nabla\cdot\xi)\xi_n dS - \int_{V_p}\left\{(\xi\cdot\nabla p_0)\nabla\cdot\xi+\gamma p_0(\nabla\cdot\xi)^2\right\}dV$$

$$\int \xi\cdot(\nabla\times\mathbf{B}_0)\times\mathbf{Q}dV = \int \mathbf{Q}\cdot\xi\times(\nabla\times\mathbf{B}_0)dV$$

$$\int \xi\cdot(\nabla\times\mathbf{Q})\times\mathbf{B}_0 dV = \int(\nabla\times\mathbf{Q})\cdot\mathbf{B}_0\times\xi dV = \int_S \mathbf{Q}\times(\mathbf{B}_0\times\xi)\cdot d\mathbf{S} + \int_{V_p}\mathbf{Q}\cdot\nabla\times(\mathbf{B}_0\times\xi)dV$$

$$= \int_S \mathbf{Q}\cdot\mathbf{B}_0\xi_n dS - \int_{V_p}\mathbf{Q}\cdot\nabla\times(\xi\times\mathbf{B}_0)dV$$

$$\mathbf{B}_0\cdot\nabla p_0 = 0$$

$$(\nabla\times\mathbf{B}_0)\cdot\nabla p_0 = 0$$

$$(\nabla\times\mathbf{B}_0)\times\mathbf{B}_0 = \nabla p_0$$

$$\int_S(\xi\cdot\nabla p_0+\gamma p_0\nabla\cdot\xi)\xi_n dS - \int_S\frac{\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{B}_1}{\mu_0}\xi_n dS$$

$$= -\int_S\left(\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial\mathbf{B}_V{}^2}{\partial n} - \frac{\partial p_0}{\partial n} - \frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial\mathbf{B}_0{}^2}{\partial n}\right)\xi_n{}^2 dS - \int_S\frac{\mathbf{B}_V\cdot\mathbf{B}_{V1}}{\mu_0}\xi_n dS \quad (*)$$

を使うと、

$$\delta W = \frac{1}{2}\int_{V_p}\left\{\gamma p_0(\nabla\cdot\xi)^2+(\xi\cdot\nabla p_0)\nabla\cdot\xi+\frac{\mathbf{Q}^2}{\mu_0}-\frac{1}{\mu_0}\xi\cdot(\nabla\times\mathbf{B}_0)\times\mathbf{Q}\right\}dV$$

$$+\frac{1}{2\mu_0}\int_{V_V}B_{V1}{}^2 dV - \frac{1}{2}\int_S\xi_n{}^2\frac{\partial}{\partial n}\left(p_0+\frac{B_0{}^2}{2\mu_0}-\frac{B_V{}^2}{2\mu_0}\right)dS$$

(**)

表面電流が流れなければ、この項は0。

MHD方程式と線形化 (VI)のオマケ

境界上のプラズマ圧力の時間変化は、$\dfrac{dp}{dt}+\gamma p\nabla\cdot\mathbf{v}=0 \quad \Rightarrow p(\mathbf{r},t)-p(\mathbf{r}_0,t)=\gamma p(\mathbf{r}_0,t)\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}$

境界のプラズマ側、真空側の磁場の時間変化は、$\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{B}_{(V)}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial\mathbf{B}_{(V)}}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{B}_{(V)}$

$$\Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r},t)-\mathbf{B}(\mathbf{r}_0,t)=\underbrace{\mathbf{B}_1+\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\mathbf{B}(\mathbf{r}_0,t)}_{\Delta\mathbf{B}} \qquad \Rightarrow \mathbf{B}_V(\mathbf{r},t)-\mathbf{B}_V(\mathbf{r}_0,t)=\underbrace{\mathbf{B}_{V1}+\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\mathbf{B}_V(\mathbf{r}_0,t)}_{\Delta\mathbf{B}_V}$$

プラズマ境界での力の釣り合い条件から $p(\mathbf{r},t)+\dfrac{\mathbf{B}^2(\mathbf{r},t)}{2\mu_0}=\dfrac{\mathbf{B}_V{}^2(\mathbf{r},t)}{2\mu_0}$

変化量は小さい(1次の項)とし、1次のつり合いの式を作ると、

$$-\gamma p(\mathbf{r}_0,t)\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}+\frac{2\mathbf{B}(\mathbf{r}_0,t)\cdot\Delta\mathbf{B}}{2\mu_0}=\frac{2\mathbf{B}_V(\mathbf{r}_0,t)\cdot\Delta\mathbf{B}_V}{2\mu_0} \qquad \Rightarrow -\gamma p_0\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}+\frac{\mathbf{B}_0\cdot(\mathbf{B}_1+\xi\cdot\nabla\mathbf{B}_0)}{\mu_0}=\frac{\mathbf{B}_{V0}\cdot(\mathbf{B}_{V1}+\xi\cdot\nabla\mathbf{B}_{V0})}{2\mu_0}$$

$$-\gamma p_0\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}+\frac{\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{B}_1}{\mu_0}=\frac{\mathbf{B}_{V0}\cdot\mathbf{B}_{V1}}{\mu_0}+\frac{\mathbf{B}_0\cdot(\xi\cdot\nabla)\mathbf{B}_0}{\mu_0}-\frac{\mathbf{B}_{V0}\cdot(\xi\cdot\nabla)\mathbf{B}_{V0}}{\mu_0}$$

$$\boxed{\xi_n\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{B_0{}^2}{2\mu_0}-\frac{B_V{}^2}{2\mu_0}+p_0\right)}$$

$$\therefore \gamma\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla p_0+\gamma p_0\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}-\frac{\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{B}_1}{\mu_0}=-\frac{\mathbf{B}_{V0}\cdot\mathbf{B}_{V1}}{\mu_0}+\boxed{\frac{\mathbf{B}_0\cdot(\xi\cdot\nabla)\mathbf{B}_0}{\mu_0}-\frac{\mathbf{B}_{V0}\cdot(\xi\cdot\nabla)\mathbf{B}_{V0}}{\mu_0}+\gamma\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla p_0} \quad (*)$$

$$-\int_S\frac{\mathbf{B}_{V0}\cdot\mathbf{B}_{V1}}{\mu_0}\xi_n dS=-\int_S dS\frac{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\xi})\mathbf{B}_{V0}\cdot\mathbf{B}_{V1}}{\mu_0}=\int_S dS\frac{\mathbf{n}\times\mathbf{A}_{V1}\cdot\mathbf{B}_{V1}}{\mu_0}$$

$$=\int_S\frac{d\mathbf{S}\cdot\mathbf{A}_{V1}\times\mathbf{B}_{V1}}{\mu_0}=\int_{V_V}\frac{\nabla\cdot(\mathbf{A}_{V1}\times\mathbf{B}_{V1})}{\mu_0}dV$$

$$=\int_{V_V}\frac{-\mathbf{A}_{V1}\cdot\nabla\times\mathbf{B}_{V1}+\mathbf{B}_{V1}\cdot\nabla\times\mathbf{A}_{V1}}{\mu_0}dV=\int_{V_V}\frac{\mathbf{B}_{V1}{}^2}{\mu_0}dV \quad (**)$$

プラズマと真空の境界条件

$\mathbf{n}\times[\mathbf{E}]=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})[\mathbf{B}]$より

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E}_{V1}=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{B}_{V0}$$

$$\mathbf{n}\times(-\partial\mathbf{A}_{V1}/\partial t)=(\mathbf{n}\cdot\partial\boldsymbol{\xi}/\partial t)\mathbf{B}_{V0}$$

$$-\mathbf{n}\times\mathbf{A}_{V1}=(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\xi})\mathbf{B}_{V0}$$

MHD方程式と線形化 (VII)

$$\boldsymbol{\kappa} \equiv (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{b}$$

$$\delta W = \frac{1}{2}\int_{plasma} \mathrm{d}V \left[\frac{|\mathbf{Q}_\perp|^2}{\mu_0} + \frac{B_0^{\,2}}{\mu_0}\left|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp + 2\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\boldsymbol{\kappa}\right|^2 + \gamma p_0 (\nabla\cdot\boldsymbol{\xi})^2 - 2(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla p_0)(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\boldsymbol{\kappa}) - \mathbf{j}_{//}\cdot(\mathbf{Q}_\perp\times\boldsymbol{\xi}_\perp) \right]$$

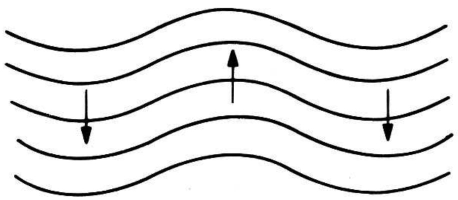
シアアルベン波
(磁力線の伸ばし効果)

プラズマ音波

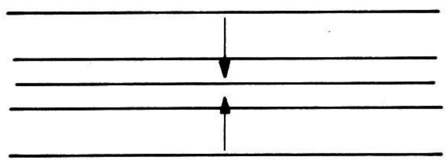
圧縮性アルベン波

電流駆動不安定化

磁力線に沿った電流(トロイダル方向)が大きいほど不安定。



Bending of
magnetic field lines

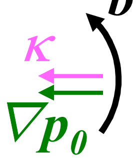


Compression of
magnetic field

安定化項

圧力駆動不安定化

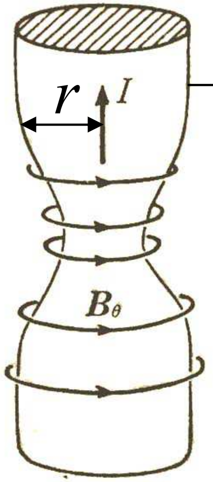
曲率と圧力勾配の向きが同じであれば、この項が負となる。
=> 不安定性の可能性



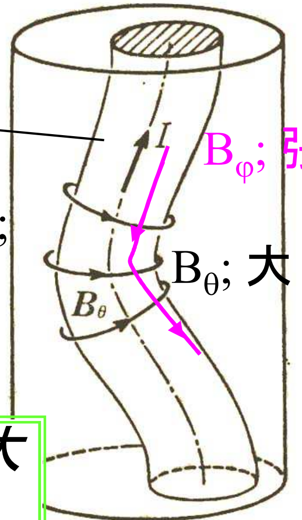
曲率、圧力勾配が大きいほど、より不安定。

電流駆動型MHD不安定性の描像

再掲



磁気面(等圧力面)
MHD平衡状態では磁場による力(磁気圧)とプラズマによる圧力が釣合っている.
ここでは，磁場は長手方向の電流で生成されている



電流が大きいほど、変形の力が大
=> ***揺動の成長大***

プラズマの等圧面が何かの理由で縮まると電流によるそこでの磁場が強くなり，縮まった等圧面はさらに縮まってしまう.
(ソーセージ不安定性)

プラズマの等圧面が何かの理由で捩じれるとねじれの曲率が小さいほうの電流によるそこでの磁場が強くなり，等圧面のねじれはさらに大きくなってしまう
(キンク不安定性).

$$p + \frac{B^2}{2\mu_0} = const.$$

加速度的に状態が元の状態から変化 => 不安定

ドーナッツ状の電流=>
ドーナッツ副半径に沿った磁場B_θ

高B_θ=>不安定

外部キンク不安定性 (I)

$$\delta W=\frac{1}{2}\int_{plasma}\mathrm{d}V\left[\gamma p_0(\nabla\cdot\xi)^2+(\xi\cdot\nabla p_0)(\nabla\cdot\xi)+\frac{|\mathbf{Q}|^2}{\mu_0}-\mathbf{j}_0(\mathbf{Q}\times\xi)\right]+\int_{vacuum}\mathrm{d}V\left(\frac{B_V{}^2}{\mu_0}\right).$$

表面電流は考えないので、この項は0。

$$-\frac{1}{2}\int_S \xi_n{}^2\frac{\partial}{\partial n}\left(p_0+\frac{B_0{}^2}{2\mu_0}-\frac{B_V{}^2}{2\mu_0}\right)dS$$

$\frac{r}{R}\sim\varepsilon,\ q\sim 1,\ \beta\sim\varepsilon^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\sim\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}>>\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\phi},\ p_0\sim 0,\ \frac{j_\theta}{j_\phi}\sim\varepsilon$ と近似する。

最も不安定な摂動を考える。
$\nabla\cdot\xi=0$ また、以下を仮定。
$\xi_r\sim\xi_\theta>>\xi_\phi,\ B_{1r}\sim B_{1\theta}>>B_{1\phi}$

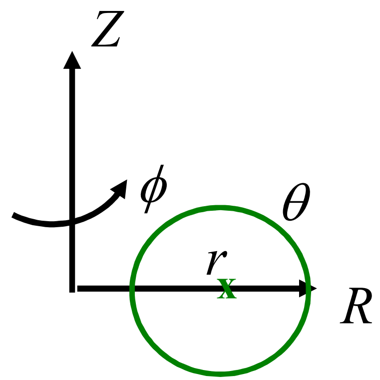
$$\delta W=\pi R\int_0^a\left(\frac{|\mathbf{Q}|^2}{\mu_0}-j_{\phi 0}(Q_r\xi_\theta-Q_\theta\xi_r)\right)\mathrm{d}\theta r\mathrm{d}r+\pi R\int_a^b\left(\frac{B_V{}^2}{\mu_0}\right)\mathrm{d}\theta r\mathrm{d}r.$$

ここで、$|\mathbf{Q}|^2=Q_\rho{}^2+Q_\theta{}^2$, a、bはそれぞれプラズマの半径、真空容器の半径(円断面を仮定)。摂動は、ポロイダル角、トロイダル角依存性としてexp[i($m\theta$-$n\phi$]の依存性を持っていると仮定すると、

$$\xi_\theta=-\frac{\mathrm{i}}{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\xi_r).$$

$\mathbf{Q}=\nabla\times(\xi\times\mathbf{B}_0)$なので

$$Q_r=-\frac{\mathrm{i}mB_\varphi}{R}\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q}\right)\xi_r,\quad Q_\theta=\frac{B_\varphi}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q}\right)r\xi_r\right].$$



ここで、q ($=rB_\phi/RB_\theta$) , $\mu_0 j_{\phi 0}=\nabla\times\mathbf{B}_0$ ($=(1/r)[\mathrm{d}/\mathrm{d}r(rB_\theta)]$)を使うと、

$$\delta W_p=\frac{\pi^2B_\varphi{}^2}{\mu_0 R}\int_0^a r\mathrm{d}r\{m^2\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q}\right)^2\xi_r{}^2+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q}\right)r\xi_r\right]\right)^2$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rB_\theta)\frac{R}{B_\varphi}\left[\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q}\right)\xi_r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\xi_r)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q}\right)r\xi_r\right]\xi_r\right]\}$$

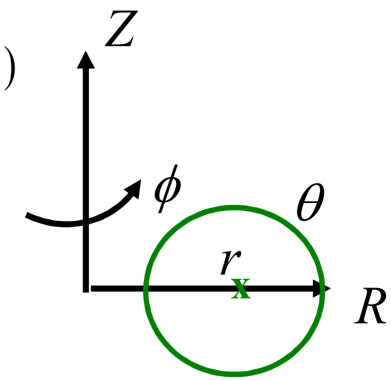
外部キンク不安定性 (I)-2

Q=∇x(ξx**B**$_0$)なので、

$$(\xi\times\mathbf{B}_0)_r \approx \xi_\theta \mathbf{B}_{0\phi} - \xi_\phi \mathbf{B}_{0\theta} \approx \xi_\theta \mathbf{B}_{0\phi} \qquad (\xi\times\mathbf{B}_0)_\theta \approx -\xi_r \mathbf{B}_{0\phi} \qquad (\xi\times\mathbf{B}_0)_\phi \approx \xi_r \mathbf{B}_{0\theta}$$

$$Q_\theta \approx \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\phi}(\xi_\theta B_{\phi 0}) - \frac{\partial}{\partial r}(\xi_r B_{\theta 0}) = -\mathrm{i}n\frac{B_{\phi 0}}{R}\xi_\theta - \frac{\partial}{\partial r}(\xi_r B_{\theta 0}) = \frac{n}{m}\frac{B_{\phi 0}}{R}\frac{\partial}{\partial r}(r\xi_r) - \frac{\partial}{\partial r}(\xi_r B_{\theta 0})$$

$$= \frac{B_{\phi 0}}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{n}{m} - \frac{B_{\theta 0}R}{B_{\phi 0}r}\right)r\xi_r = \frac{B_{\phi 0}}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\frac{n}{m} - \frac{1}{q}\right)r\xi_r\right] \qquad \xi_\theta = -\frac{1}{\mathrm{i}m}\frac{\partial}{\partial r}(r\xi_r).$$



$$Q_r = -\frac{\mathrm{i}mB_{\phi 0}}{R}\left(\frac{n}{m} - \frac{1}{q}\right)\xi_r, \quad Q_\theta = \frac{B_{\phi 0}}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\frac{n}{m} - \frac{1}{q}\right)r\xi_r\right].$$

$$\frac{Q^2}{\mu_0} = \frac{B_{\phi 0}{}^2}{\mu_0 R^2}\left\{m^2\left(\frac{n}{m} - \frac{1}{q}\right)^2 \xi_r{}^2 + \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{n}{m} - \frac{1}{q}\right)r\xi_r\right]^2\right\}$$

ここで、$\mu_0 j_{\phi 0}$=∇x**B**$_0$ (=(1/r)[d/dr(rB_θ)])を使った。

$$j_{\phi 0}(Q_r\xi_\theta - Q_\theta\xi_r) = \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rB_{\theta 0})\frac{B_{\phi 0}}{R}\left(\left(\frac{n}{m} - \frac{1}{q}\right)\xi_r\frac{\partial}{\partial r}(r\xi_r) - \xi_r\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\frac{n}{m} - \frac{1}{q}\right)r\xi_r\right]\right) \qquad Y \equiv \left(\frac{n}{m} - \frac{B_{\theta 0}R}{B_{\phi 0}r}\right) = \left(\frac{n}{m} - \frac{1}{q}\right),$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(-r^2 Y\frac{B_{\phi 0}}{R}\right)\frac{B_{\phi 0}}{R}\left(Y\xi_r\frac{\partial}{\partial r}(r\xi_r) - \xi_r\frac{\partial}{\partial r}(Yr\xi_r)\right) = \frac{1}{\mu_0}\frac{B_{\phi 0}{}^2}{R^2}\frac{d}{dr}(r^2 Y)\xi_r{}^2\frac{dY}{dr} \qquad \frac{dY}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{B_{\theta 0}}{r}\right)$$

$$\delta W_p = \frac{\pi B_{\phi 0}{}^2}{\mu_0 R}\int_0^a\left(m^2 Y^2\xi_r{}^2 + \left[\frac{\partial}{\partial r}(Yr\xi_r)\right]^2 - \xi_r{}^2\frac{\partial}{\partial r}(r^2 Y)\frac{\partial Y}{\partial r}\right)\mathrm{d}\theta r\mathrm{d}r$$

外部キンク不安定性 (II)

$\xi_r d\xi_r/dr$, を含む項を部分積分して、

$$\delta W_p = \frac{\pi^2 B_\varphi{}^2}{\mu_0 R}\int_0^a r\mathrm{d}r\left\{\left[\left(r\frac{\mathrm{d}\xi_r}{\mathrm{d}r}\right)^2 + \left(m^2-1\right)\xi_r{}^2\right]\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q}\right)^2\right\} + \left[\frac{2}{q_a}\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q_a}\right)+\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q_a}\right)^2\right]a^2\xi_{ra}{}^2.$$

ここで、aの添え字は$r=a$の値であることを示す

次に、δWの真空領域からの寄与を評価する、真空領域の摇動磁場を▽・**B**=0から、磁束関数を使って $B_{\mathrm{Vr1}}=-(1/r)\partial\Psi/\partial\theta$, $B_{\mathrm{V}\theta 1}=\partial\Psi/\partial r$と表せる。

したがって、δW_{V}は以下のように書ける。

$$B_V{}^2 = B_{Vr1}{}^2 + B_{V\theta 1}{}^2 = \frac{\mathrm{m}^2}{r^2}\Psi + \left(\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}r}\right)^2,$$

$$\delta W_V = \frac{\pi^2 R}{\mu_0}\int_a^b r\mathrm{d}rB_V{}^2 = \frac{\pi^2 R}{\mu_0}\left\{\int_a^b r\mathrm{d}r\left[\frac{\mathrm{m}^2}{r^2}\Psi^2 - \frac{\Psi}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}r}\right)\right] + \left(r\Psi\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}r}\right)\Bigg|_a^b\right\}.$$

ここで、真空中では、▽x**B**=0より、ΨはLaplace方程式を満たすので、 $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{\mathrm{m}^2}{r^2}\Psi = 0.$

$$\delta W_V = \frac{\pi^2 R}{\mu_0}\left(r\Psi\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}r}\right)\Bigg|_a^b.$$

また、Laplace方程式の解は、$\Psi=\alpha r^{\mathrm{m}}+\beta r^{-\mathrm{m}}$と表せることに注意し、真空容器の境界は、導体であることを使うと、$B_{\mathrm{r}}(b)=0$ at $r=b$ => $\Psi=0$ at $r=b$.

一方、プラズマ表面($r=a$)で、$B_{\mathrm{Vr1}}(a)=-\mathrm{i}m\Psi_a/a=Q_{\mathrm{r}}(a)=-\mathrm{i}(mB_\varphi/R)(n/m-1/q_{\mathrm{a}})\xi_{\mathrm{ra}}$
=> $\Psi_{\mathrm{a}}=B_{\theta\mathrm{a}}(nq_{\mathrm{a}}/m-1)\xi_{\mathrm{ra}}$.

外部キンク不安定性 (III)

以上よりΨの解は以下の通り。 $\Psi = B_{\theta a}\left(\frac{nq_a}{m}-1\right)\frac{(r/b)^m-(b/r)^m}{(a/b)^m-(b/a)^m}\xi_{ra}.$

したがって、δWの真空からの寄与は以下のように表せる。

$$\delta W_V = \frac{\pi^2 R}{\mu_0} m\lambda\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q_a}\right)a^2\xi_{ra}{}^2, \quad \text{where} \quad \lambda \equiv \frac{1+(a/b)^{2m}}{1-(a/b)^{2m}}.$$

ここで、導体壁を無限遠に持っていく(b=>∞)と、λ=>1.

δW_pをδW_pにを加えてまとめると、

$$\delta W = \frac{\pi^2 B_\varphi{}^2}{\mu_0 R}\int_0^a r\mathrm{d}r\left\{\left[\left(r\frac{\mathrm{d}\xi_r}{\mathrm{d}r}\right)^2+\left(m^2-1\right)\xi_r{}^2\right]\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q}\right)^2\right\}+\left[\frac{2}{q_a}\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q_a}\right)+(1+m\lambda)\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q_a}\right)^2\right]a^2\xi_{ra}{}^2.$$

$$\boxed{\text{When} \quad \xi_{ra}=0, \quad \delta W \geq 0. \quad \Rightarrow \quad \text{stable} \quad \textit{or} \quad \text{marginal} \quad \text{stable.}}$$

外部キンク

m>0の時、積分記号の部分(プラズマ内部からの寄与)は、常に正かゼロ。

したがって、$q_a>0$, m>0, - ∞ <n< ∞ の場合を考えると、不安定であるための必要条件は

$$\left[\frac{2}{q_a}+(1+m\lambda)\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q_a}\right)\right]\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q_a}\right)<0 \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{n}\frac{m\lambda-1}{m\lambda+1}<q_a<\frac{m}{n},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{n}\frac{m-1}{m+1}<q_a<\frac{m}{n} \quad \left(m=2,n=1 \Rightarrow 2/3<q_a<2, m=3,n=1 \Rightarrow 3/2<q_a<3\right) \; @\lambda=1.$$

外部キンク不安定性 (IV)

m=1の時、 $\delta W=\frac{\pi^2 B_\varphi{}^2}{\mu_0 R}\int_0^a r\mathrm{d}r\left\{\left(r\frac{\mathrm{d}\xi_r}{\mathrm{d}r}\right)^2\left(n-\frac{1}{q}\right)^2\right\}+\left[\frac{2}{q_a}\left(n-\frac{1}{q_a}\right)+2\left(n-\frac{1}{q_a}\right)^2\right]a^2\xi_{ra}{}^2.$

プラズマ中の安定化効果を最小化する固有関数は、$\xi_r(r)=\xi_{ra}$=constantで与えられるので安定条件は、

$$\boxed{\delta W=\left[2n\left(n-\frac{1}{q_a}\right)\right]a^2\xi_{ra}{}^2. \quad => \quad q_a>1\geq\frac{1}{n}}$$

Kruskal-Shafranov条件

m>=2の時,積分記号の部分(プラズマ内部からの寄与)を最小化するは$\xi_r(r)$以下のEuler-Lagrange方程式を見たす。

$$\frac{\mathrm{d}_r}{\mathrm{d}r}\left[r^3\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q}\right)^2\frac{\mathrm{d}\xi_r}{\mathrm{d}r}\right]-r\left(m^2-1\right)\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q}\right)^2\xi_r=0.$$

上式をξ_r,が満たすとすると、δWは以下のように書き直せる。

$$\delta W=\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q_a}\right)\left[\left(m+\frac{a\xi_{ra}'}{\xi_{ra}}\right)\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q_a}\right)+\left(\frac{n}{m}+\frac{1}{q_a}\right)\right]a^2\xi_{ra}{}^2.$$

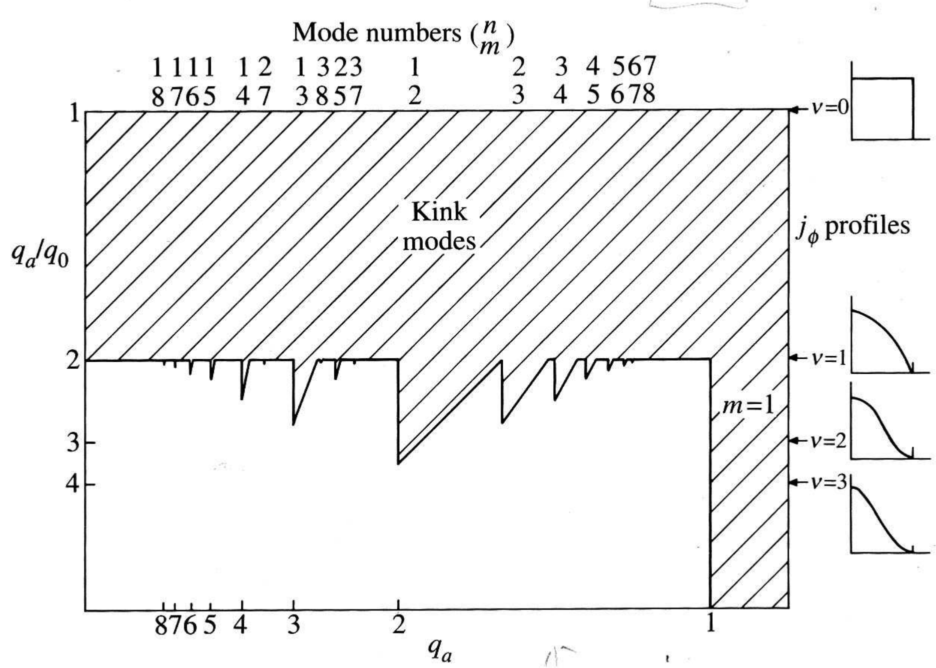
δWを評価するには、Euler-Lagrange方程式を解いて、$a\xi_r'/\xi_r$を求める必要がある。
固有関数がプラズマ境界付近に構造を持つと仮定し、電流分布の効果をプラズマ境界での電流値と平均電流値の比で表すと、不安定条件は以下のようになる。

$$\boxed{\frac{1}{n}\left(m-\frac{J_a}{\langle J\rangle}\right)<q_a<\frac{m}{n},\quad \text{for}\quad J_a\neq 0,\quad \text{and}\quad \frac{1}{n}\left(m-\exp\left(\frac{2m\langle J\rangle}{aJ_a'}\right)\frac{J_a}{\langle J\rangle}\right)<q_a<\frac{m}{n},\quad \text{for}\quad J_a=0.}$$

外部キンク不安定性 (V)

右図は外部キンク不安定性の不安定領域が、電流分布によりどう変化するかを数値計算で示した結果である。
$j(r)=j_0(1-\rho^2)^\nu$. $\rho=r/a$. $q=q_a\rho[1-(1-\rho)^{\nu+1}]^{-1}$.=> $q_a/q_0=\nu+1$.

$\nu>2.5$の時, $m>=2$のすべてのモードがq_aに関わらず不安定となる。
$1<\nu<2.5$の時は、安定となるq_aの窓(領域)が存在する。



J.A.Wesson; Nucl. Fus. 18, 87 (1978).

簡約化MHD方程式 (I)

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}_1) = 0,$$

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}_1 = \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_1 - \nabla p_1$$

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0 = \eta \mathbf{j}_1$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{j}_1,$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}$$

=> 不安定解析の基礎式

最も不安定な摂動条件で、不安定性を調べる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0$$

更に、トロイダル方向の摂動速度が小さいと仮定すると、速度の摂動成分は、流れ関数Uを使って次式で表せる。

$$\boxed{\mathbf{u}_1 = \nabla U \times \mathbf{e}_\phi} \qquad \boxed{\mathbf{B}_1 = \nabla \psi_1 \times \mathbf{e}_\phi}$$

$\mathbf{u}_1 = \nabla U \times \mathbf{e}_\phi$ より、運動方程式は、磁場に垂直方向の成分のみに着目し、かつ、$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0$ から変数が1つにであることから、運動方程式の両辺と磁場の外積をとり、その後全体の内積を取る($\nabla \cdot (\mathbf{B}\times)$)と

$$\mathbf{B} \cdot \frac{\rho_0}{B_0^{\ 2}} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\frac{\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{B}_0}{B_0^{\ 2}} + \mathbf{B} \cdot \frac{\nabla B_0^{\ 2} \times \nabla p_1}{B_0^{\ 4}},$$

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla_\perp^{\ 2} U = -(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\nabla_\perp^{\ 2}\psi_1 - \nabla \psi_1 \times \mathbf{e}_\phi \cdot \nabla j_{\phi 0} - \mathbf{e}_\phi \times \boldsymbol{\kappa}_r \cdot \nabla p_1$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \mathbf{B}_0 \cdot \nabla U + \eta \nabla^2 \psi_1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_1 + \nabla U \times \mathbf{e}_\phi \cdot \nabla p_0 = 0$$

簡約化MHD方程式

$$\nabla_\perp \equiv \nabla - \frac{\mathbf{B}_0}{|\mathbf{B}_0|} \cdot \nabla$$

MHD方程式と線形化 (III)　再掲

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_0 \mathbf{u}_1) = 0,$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = \mathbf{j}_1\times\mathbf{B}_0 + \mathbf{j}_0\times\mathbf{B}_1 - \nabla p_1$$

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_1\times\mathbf{B}_0 = \eta\mathbf{j}_1$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1\cdot\nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla\cdot\mathbf{u}_1 = 0$$

$$\nabla\times\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{j}_1,$$

$$\nabla\times\mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{j}_1}{\partial t}\times\mathbf{B}_0 + \mathbf{j}_0\times\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}\mathbf{B}_1 - \nabla\frac{\partial p_1}{\partial t}$$

$$\nabla\times\partial\mathbf{B}_1/\partial t = \mu_0\,\partial\mathbf{j}_1/\partial t,$$

$$\nabla\times(\mathbf{u}_1\times\mathbf{B}_0 - \eta\mathbf{j}_1) = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \qquad -\frac{\partial p_1}{\partial t} = \mathbf{u}_1\cdot\nabla p_0 + \gamma p_0\nabla\cdot\mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{E}_1 = -\mathbf{u}_1\times\mathbf{B}_0 + \eta\mathbf{j}_1 \qquad \nabla\times\mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}$$

まとめると、

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} = \nabla\{\mathbf{u}_1\cdot\nabla p_0 + \gamma p_0\nabla\cdot\mathbf{u}_1\} + \mathbf{j}_0\times\{\nabla\times(\mathbf{u}_1\times\mathbf{B}_0 - \eta\mathbf{j}_1)\} + \frac{1}{\mu_0}[\nabla\times\{\nabla\times(\mathbf{u}_1\times\mathbf{B}_0)\}]\times\mathbf{B}_0.$$

式の物理的描像の明確化のため、変位ベクトル $\xi; (\partial\xi/\partial t = \mathbf{u}_1)$ を導入すると

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathbf{F}(\xi), \qquad \mathbf{F}(\xi) \equiv \nabla(\xi\cdot\nabla p_0 + \gamma p_0\nabla\cdot\xi) + \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\mathbf{B}_0)\times\mathbf{Q} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\mathbf{Q})\times\mathbf{B}_0.$$

ここで、$\mathbf{Q} \equiv \nabla\times(\xi\times\mathbf{B}_0)$.

$\eta = 0$を仮定。

$\eta \neq 0$の場合は、 $\nabla\times(\mathbf{u}_1\times\mathbf{B}_0 - \eta\mu_0\nabla\times\mathbf{B}_1) = -\dfrac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}$

と、同時に解く必要あり。

簡約化MHD方程式 (2)

線形化された(full-)MHD方程式

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} = \nabla\{\mathbf{u}_1 \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1\} + \mathbf{j}_0 \times \{\nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0 - \eta \mathbf{j}_1)\} + \frac{1}{\mu_0}[\nabla \times \{\nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0)\}] \times \mathbf{B}_0.$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = -\nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0 - \eta \mu_0 \nabla \times \mathbf{B}_1)$$

抵抗がないときは、演算子の自己随伴性により変分原理を用いるなど、数値的にも解析しやすいが、抵抗が入ると、数値計算的にも非常に複雑になる。

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla_\perp^2 U = -(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \nabla_\perp^2 \psi_1 - \nabla \psi_1 \times \mathbf{e}_\phi \cdot \nabla j_{\phi 0} - \mathbf{e}_\phi \times \boldsymbol{\kappa}_r \cdot \nabla p_1$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \mathbf{B}_0 \cdot \nabla U + \eta \nabla^2 \psi_1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_1 + \nabla U \times \mathbf{e}_\phi \cdot \nabla p_0 = 0$$

簡約化MHD方程式

$$\nabla_\perp \equiv \nabla - \frac{\mathbf{B}_0}{|\mathbf{B}_0|} \cdot \nabla$$

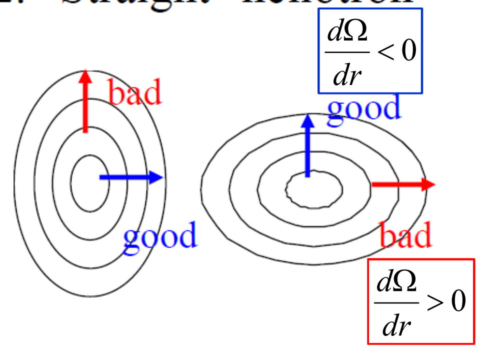
変数が少ない分、full-MHD方程式に対して、数値解析が容易。
新たな効果を考慮しやすい。

理想交換型不安定性 I -簡約化MHD方程式による考察-

ヘリカルプラズマにおける理想交換型不安定性の性質を理想簡約化MHD方程式群を使って考察する。

$$\boxed{\begin{aligned}
&\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\nabla_\perp{}^2 U = -(\mathbf{B}_0\cdot\nabla)\nabla_\perp{}^2\psi_1 - \nabla\psi_1\times\mathbf{e}_\phi\cdot\nabla j_{\phi 0} - \mathbf{e}_\phi\times\boldsymbol{\kappa}_r\cdot\nabla p_1\\
&\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = \mathbf{B}_0\cdot\nabla U + \eta\nabla^2\psi_1\\
&\frac{\partial}{\partial t}p_1 + \nabla U\times\mathbf{e}_\phi\cdot\nabla p_0 = 0
\end{aligned}}$$

2. "Straight" heliotron



ここで、直線ヘリカルを考え、抵抗は0とする。

$$j_{\phi 0} = 0$$

$$\boldsymbol{\kappa}_r = \nabla\Omega(r) = \mathbf{e}_r\frac{d\Omega}{dr}$$

$$\nabla U\times\mathbf{e}_\phi = \frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{e}_r\times\mathbf{e}_\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta\times\mathbf{e}_\phi = -\frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\mathbf{e}_r$$

$$\nabla\psi_1\times\mathbf{e}_\phi = \frac{\partial\psi_1}{\partial r}\mathbf{e}_r\times\mathbf{e}_\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta\times\mathbf{e}_\phi = -\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\mathbf{e}_r$$

更に、 $\{U, p_1, \psi_1\} = \{\hat{U}, \hat{p}, \hat{\psi}\}\exp[\mathrm{i}(m\theta - n\phi) - \mathrm{i}\omega t]$ と仮定すると、

$$-i\omega p_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta\times\mathbf{e}_\phi\cdot\mathbf{e}_r\frac{dp_0}{dr} = 0 \Rightarrow -i\omega p_1 + \frac{im}{r}U\frac{dp_0}{dr} = 0 \Rightarrow p_1 = \frac{k_\theta}{\omega}U\frac{dp_0}{dr}$$

ここで、k_θ=m/r

$$-i\omega\psi_1 = iB_O k_{//}U \Rightarrow \psi_1 = -B_O k_{//}U/\omega$$

$$\mathbf{B}_O\cdot\nabla A \equiv B_O\nabla_{//O}A = \left(B_{O\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + B_{O\phi}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)A = A\left(\frac{im}{r}B_{O\theta} - \frac{in}{R}B_{O\phi}\right) = A\frac{im}{R}B_{O\phi}\left(\frac{RB_{O\theta}}{rB_{O\phi}} - \frac{n}{m}\right) = A\boxed{\frac{B_{O\phi}}{R}i(mi - n)}$$

$\mathrm{i}k_{//}$

理想交換型不安定性 I-2 -簡約化MHD方程式による考察-

$$p_1 = \frac{k_\theta}{\omega} U \frac{dp_0}{dr} \qquad \psi_1 = -B_O k_{//} U / \omega$$

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla_\perp{}^2 U = -(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \nabla_\perp{}^2 \psi_1 - \nabla \psi_1 \times \mathbf{e}_\phi \cdot \nabla j_{\phi 0} - \mathbf{e}_\phi \times \boldsymbol{\kappa}_r \cdot \nabla p_1$$

$$\{U, p_1, \psi_1\} = \{\hat{U}, \hat{p}, \hat{\psi}\} \exp[\mathrm{i}(m\theta - n\phi) - \mathrm{i}\omega t].$$

$$-i\omega\rho_0 \nabla_\perp{}^2 U = -iB_0 k_{//} \nabla_\perp{}^2 \psi_1 - \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_r \frac{d\Omega}{dr} \cdot \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial p_1}{\partial \theta} => -i\omega\rho_0 \nabla_\perp{}^2 U = -iB_0 k_{//} \nabla^2 \psi_1 - ik_\theta \frac{d\Omega}{dr} p_1$$

$$=> -i\omega\rho_0 \nabla_\perp{}^2 U = -iB_0{}^2 k_{//} \nabla_\perp{}^2 \left(\frac{k_{//} U}{\omega} \right) - ik_\theta \frac{d\Omega}{dr} \frac{k_\theta}{\omega} \frac{dp_0}{dr} U => \omega^2 \rho_0 \nabla_\perp{}^2 U = B_0{}^2 k_{//} \nabla_\perp{}^2 (k_{//} U) + k_\theta{}^2 \frac{d\Omega}{dr} \frac{dp_0}{dr} U$$

$$\nabla_\perp{}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} => \nabla_\perp{}^2 U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2} U$$

$$\rho_0 \omega^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - k_\theta{}^2 \right) \hat{U} = B_0{}^2 k_{//} \left(\frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - k_\theta{}^2 \right) (k_{//} \hat{U}) + k_\theta{}^2 p_0' \Omega' \hat{U}$$

ここで、' =d/dr

理想交換型不安定性 II -サイダム条件-

$$\omega^2\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}-k_\theta{}^2\right)\hat{U}=k_{//}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}-k_\theta{}^2\right)\left(k_{//}\hat{U}\right)+k_\theta{}^2p_0'\Omega'\hat{U}$$

簡単のためにB_0=1, ρ_0=1と仮定した。

安定、不安定の境界領域にある場合(ω~0)の共鳴有理面に局在化する固有関数 $\hat{U}$ を解析するために、以下の様な関係を使う。

$x=r-r_0$, $k_{//}=k_{//}'x$, $k_{//}'=m\iota'|_{r=r0}$.　　ここで、r_0は共鳴有理面。

すると次式を得る。

$$0=x^2k'_{//0}{}^2\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-k_{\theta 0}{}^2\right)\hat{U}+k_{\theta 0}{}^2p_0'\Omega'\hat{U}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\hat{U}-\left\{\frac{k_{\theta 0}{}^2p_0'\Omega'}{x^2k'_{//0}{}^2}+k_{\theta 0}{}^2\right\}\hat{U}=0$$

上式の解として$U\sim x^\nu$ を仮定すると、以下の条件を満たすとき、νは複素数となり、Uは振動解となり、x=0付近で無限界0点を横切る。

$$\nu(\nu-1)-k_{\theta 0}{}^2p_0'\Omega'/k'_{//0}{}^2=0 \qquad -k_{\theta 0}{}^2p_0'\Omega'/k'_{//0}{}^2>1/4.$$

ニューカムによるとUが境界以外で0を切る時、その系は常に不安定であることから、下記の条件が居所的に不安定であるための十分条件となり、サイダム条件と呼ばれる。

$$-\frac{p_0'\Omega'}{r^2}>\frac{1}{4}\iota'^2$$

- 磁気シアが無い場合は、p_0'の符号(向き)とΩ'の符号が反対の場合、常に不安定。(通常、p_0'<0, Ω'>0が不安定)
- 磁気シアがあると、不安定になるためには大きなp_0'が必要。

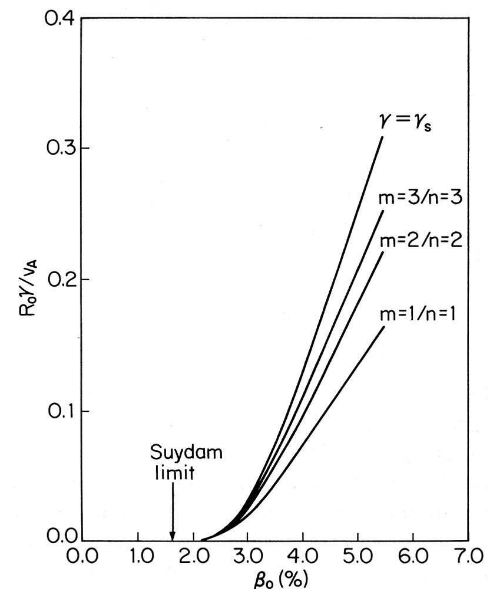
ドーナッツ型のプラズマにおいてこの条件は、メルシエ条件に拡張される。

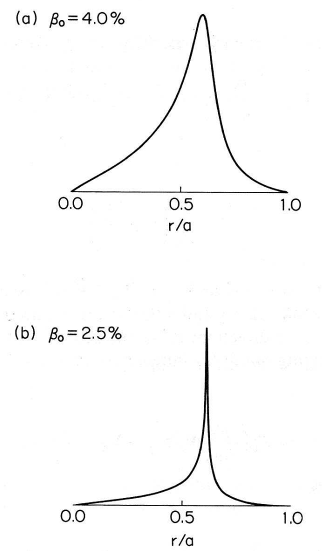
理想交換型不安定性 III -サイダム条件と巨視的モードの安定性の関係-

一般的に巨視的モードはサイダム条件が不安定な場合でもさえ、安定な場合がある。
サイダム条件は、不安定のための十分条件にも関わらず、巨視的モードはサイダム条件下での安定なのか?

交換型不安定性のモード幅は成長率が低いほど、狭くなるという性質を持っている。
通常の安定性解析は、有限のメッシュサイズを使って数値計算で行われている。したがって、ある程度幅のある不安定性(つまり、成長率もある程度大きいもの)のみ、解析できる。サイダム条件は、小半径方向に極限的に局在化したモードの不安定条件であるため、サイダム条件下でも、巨視的モードは安定な場合が起こりうる。

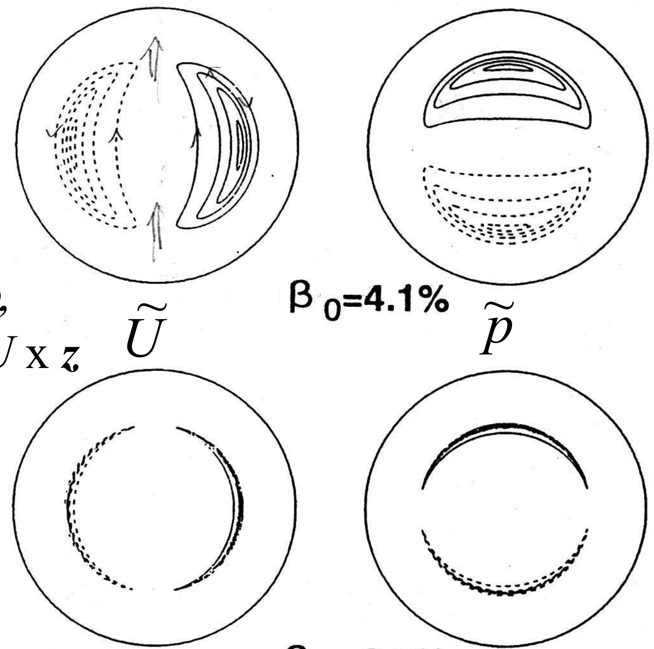
注意!! 交換型不安定性の場合、巨視的モードの安定限界は数値計算におけるメッシュサイズに強く依存する。





M.Wakatani; Chap.5.6 in “Stellarator and Heliotron devices”, Oxford (1998).

理想交換型不安定性 IV -モード構造と成長率の例-

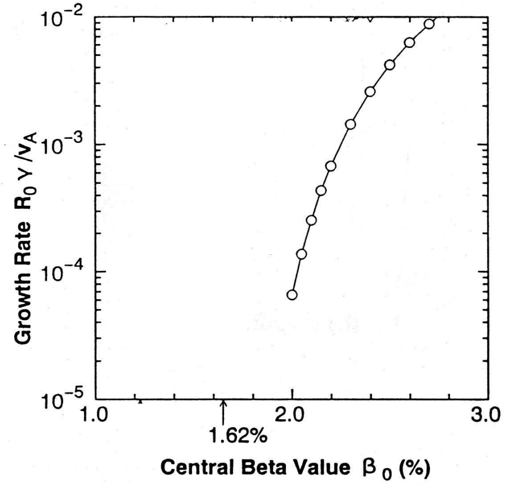


$\xi = mU/r\omega$,

$\xi =$ **grad** $U \times \mathbf{z}$

$\widetilde{U}$ β_0=4.1% $\widetilde{p}$

β_0=2.5%



K.Watanabe; Nuclear Fusion 32, 1647 (1992).

$$\widetilde{p} = k_\theta p_0' \widetilde{U} \big/ \omega$$

Because ω is a imaginary, the difference of the phase between U and p is π/2.

環状磁場プラズマでの圧力駆動型MHD不安定性

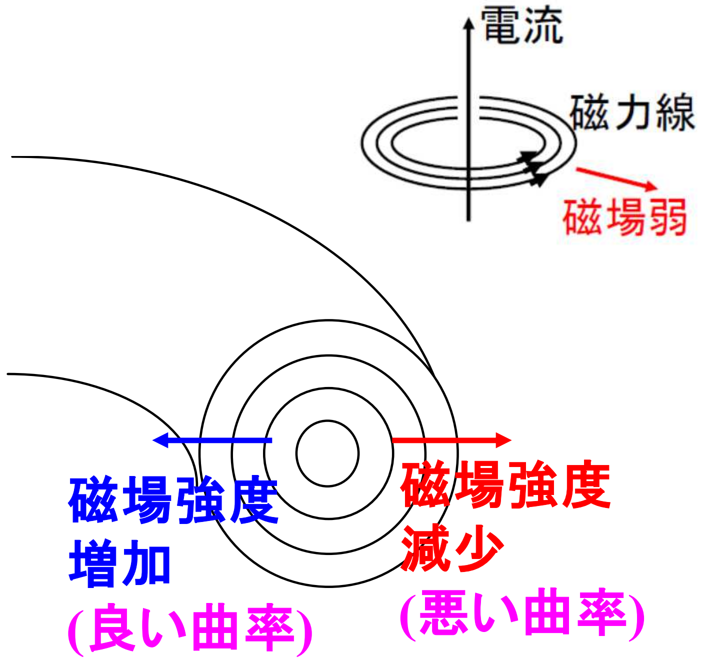
環状磁場プラズマ閉じ込め装置では、ドーナッツの内、外で磁場の曲率が異なる

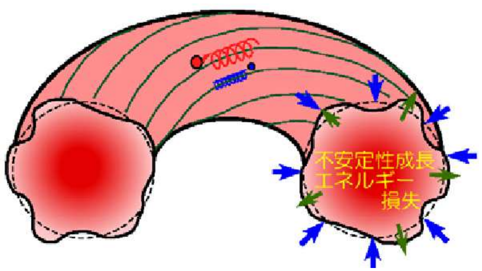
=>

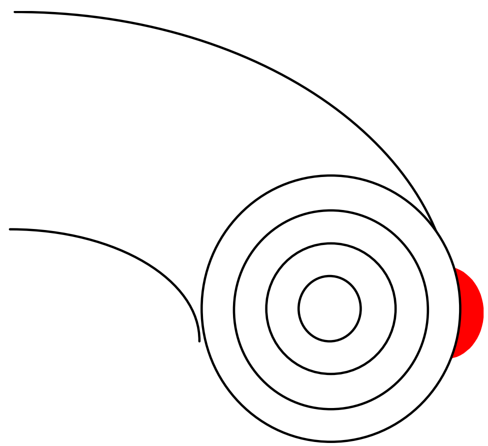
悪い曲率での不安定性の発現

=>

バルーニングモード
(磁気面上で不均一な不安定性)







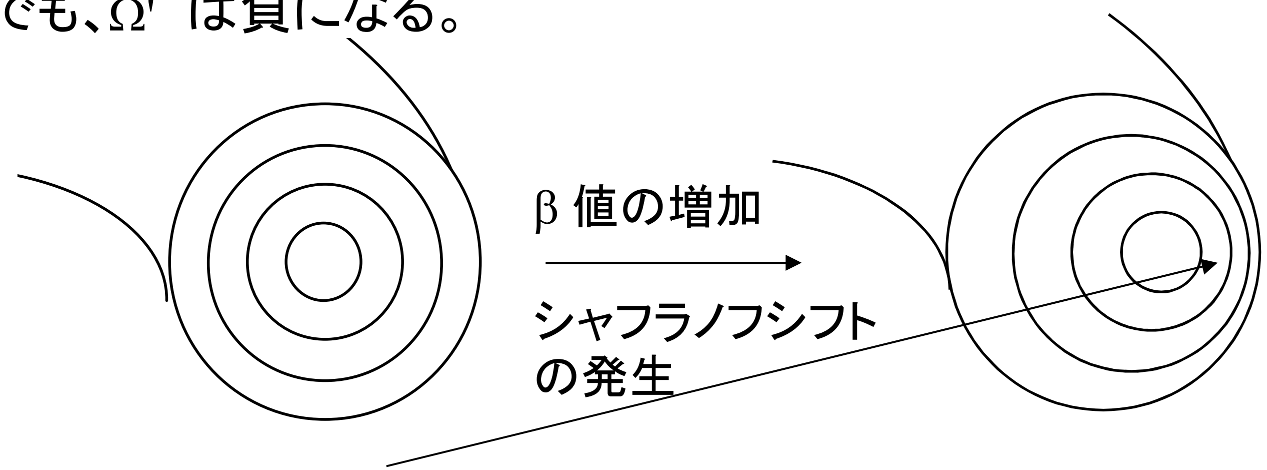
バルーニングモードの不安定条件

不安定条件は、原理的に交換型不安定性と同じ。
しかしながら、悪い曲率領域での局所的な曲率や磁気シアが重要なパラメーターとなる。

$$-\frac{p_0'\Omega'}{r^2} > \frac{1}{4}\iota'^2 \quad => \quad -q^2 p_0'\tilde{\Omega}' > \frac{1}{4}\tilde{s}^2 \quad \left(\tilde{s} \equiv \frac{r}{q}\tilde{q}' = -\frac{r}{\iota}\tilde{\iota}'\right)$$

ここで、~は悪い曲率領域での値を意味する。

トカマクでも、$\tilde{\Omega}'$ は負になる。



シャフラノフシフトが発生すると、トーラス外側の磁力線が密になる。
=> ポロイダル磁場B_pが増加する。
=> 磁力線が密なほどB_pの増分は大きい（周辺の磁気面ほど、隣の磁気面との距離が短い）。
=> $d\Delta B_p/dr > 0$.

バルーニングモードの不安定条件 II

したがって、シャフラノフシフトが発生すると、悪い曲率領域の局所磁気シアは、以下のように表せる。

$$\tilde{s} \equiv \frac{r}{q}q' + (\Delta q)' \qquad (\Delta q)' = \frac{d}{dr}\left(\frac{r}{\Delta B_p}\frac{B_t}{R}\right) \sim \frac{rB_t}{R}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\Delta B_p}\right) < 0$$

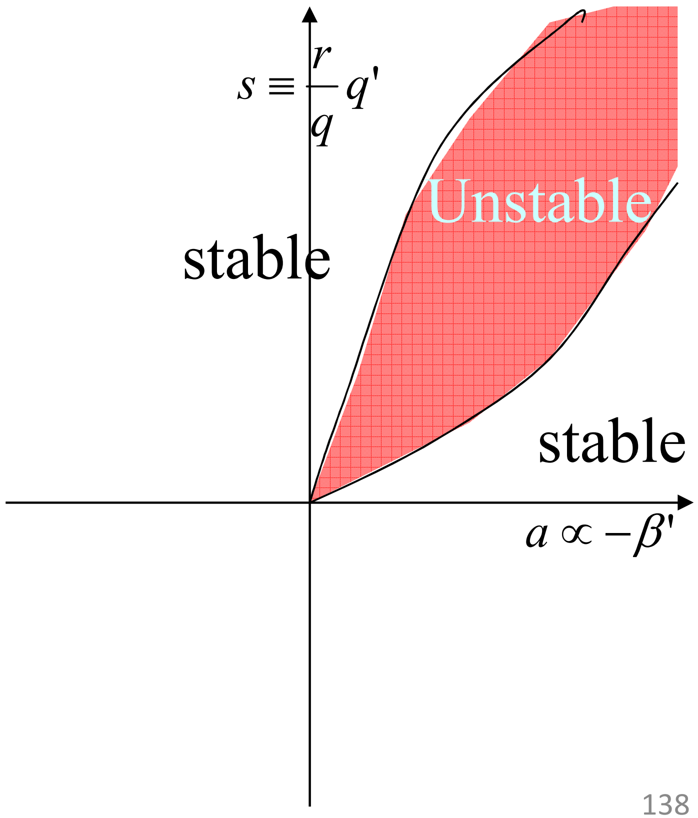
$-\alpha \equiv (\Delta q)'$ とおくと、 $\tilde{s} \equiv s - \alpha$

$$-q^2 p_0' \tilde{\Omega}' > \frac{1}{4}\tilde{s}^2$$ より、

$$(s-\alpha)^2 < k\alpha \Rightarrow s^2 - 2\alpha s + \alpha^2 - k\alpha < 0$$
$$\Rightarrow \alpha - \sqrt{k\alpha} < s < \alpha + \sqrt{k\alpha}$$

ここで、圧力が上がると$-p_0'$, αが大きくなるので、$-p_0 \propto \alpha$とおいた。

通常のトカマクでは、0<k<1, s>0より、不安定条件は右図のようになる。



バルーニングモードの不安定条件 III Advanced

より正確にバルーニングモードの安定性を解析するためには、Eikonal近似を導入する。

$$A = F(r)\exp(\mathrm{i}S),\ S(r,\theta,\phi) = -n[\phi - q(r)(\theta-\theta_0)] \Rightarrow -[n\phi - m(r)(\theta-\theta_0)],\ \ n >> 1.$$

$$A = F(r)\exp\left(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + nq_r{}'(r\text{-}r_r)(\theta-\theta_0)\right) \Rightarrow F(r)\exp\left(nq_r{}'(r\text{-}r_r)(\theta-\theta_0)\right)\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r});\ \text{near}\ q = q_r.$$

$$\text{cf.}\ S = -[n\phi - m(\theta-\theta_0)];\ \text{in fourier analysis.}$$

この部分の変化は共鳴面付近で相対的に大きくなる。

共鳴有理面

Eikonal近似を導入すると、ポテンシャルエネルギーは次式のように書くことができる。

$$RB_p\xi_r \Rightarrow A$$

$$\delta W = \int\left[\left(1+\Lambda^2\right)\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 - \alpha(\Lambda\sin\theta + \cos\theta)F^2\right]\mathrm{d}\theta,\ \text{where}\ \Lambda = s\theta - \alpha\sin\theta,\ s = \frac{r}{q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}r},\ \alpha = -\frac{2\mu_0 Rq^2}{B^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}.$$

上記のポテンシャルエネルギーを最小化する固有関数Fは次のEuler方程式を満たす。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\left(1+\Lambda^2\right)\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 - \alpha(\Lambda\sin\theta + \cos\theta)F\right] = 0.$$

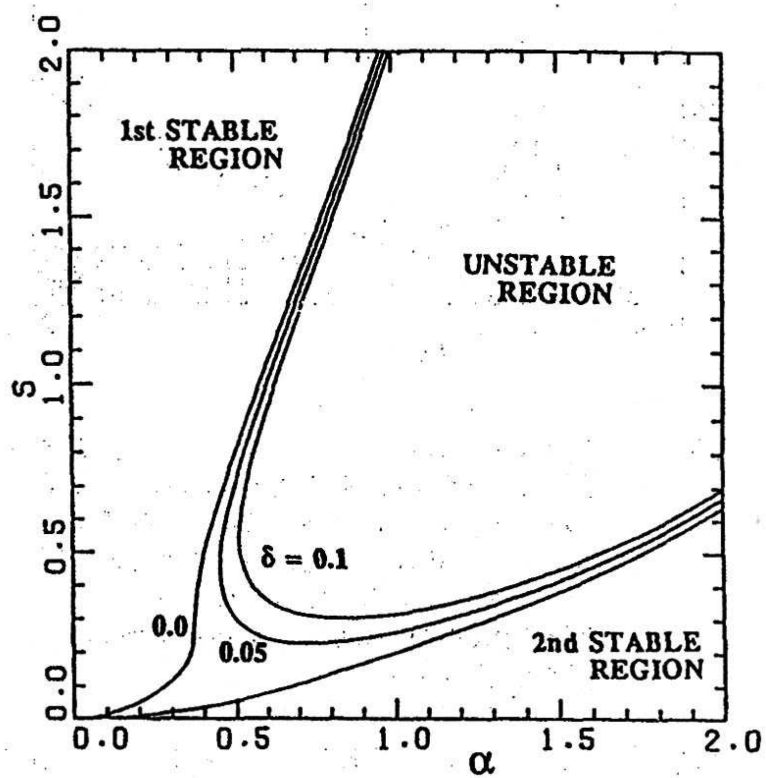
[ref] J.Wesson; Chap.6.13-14 in “Tokamaks --2nd edit.--” Clarendon press (1997).

バルーニングモードの不安定条件 IV　Advanced

バルーニング方程式の単純な解析解はないので、以下に数値計算結果を示す。（詳細が知りたい場合は、以下の文献[1], [2], [3]を参考にすること）

文献[2]によると, 安定境界は右図のダイアグラムで表せる。ここで、は、磁気井戸（よい曲率の平均値）の深さを示す。

曲率の平均値が「良い曲率」の場合、バルーニングモードが不安定でない運転も可能である。

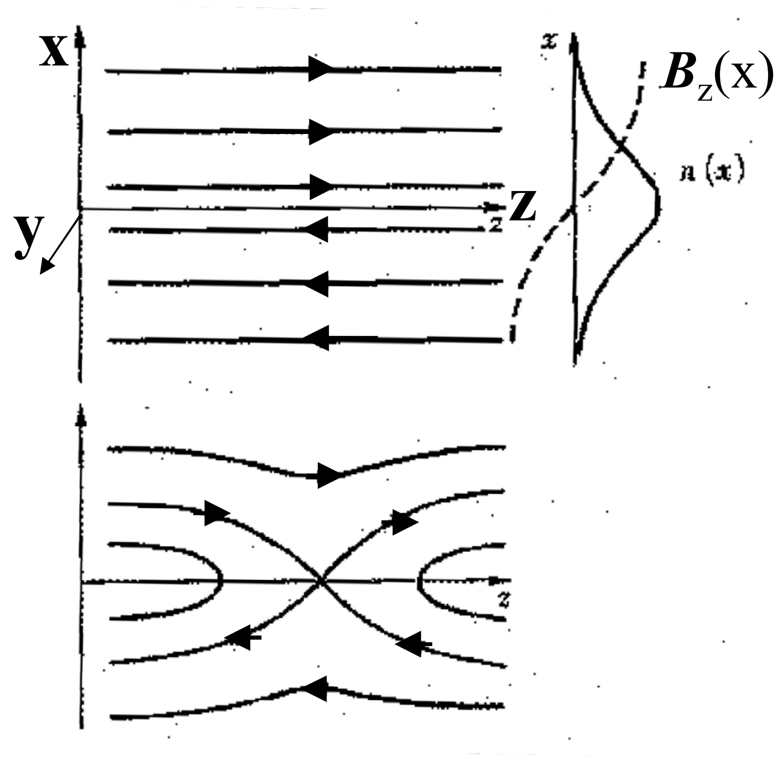


[1] J.P.Freidberg; Chap.10.5 in “Ideal Magneto hydrodynamics” Plenum press (1987).
[2] M.Azumi and M.Wakatani; J.Plasma Fus. Res., 66 (1991) 494.
[3] J.Wesson; Chap.6.14 in “Tokamaks --2nd edit.--” Clarendon press (1997).

テアリング不安定性 I

トカマクプラズマの閉じた磁気面の間や、地球の後方に長く伸びた磁気中性面では、磁力線に沿ったプラズマ層を電流が流れる(「電流シート」)ことがある。このような電流シート中に有限の電気抵抗が存在すると、隣り合う磁力線が融合し、磁気面構造が壊れる「テアリング不安定性」が発生することがある。

地球の磁気中性面をモデル化した右上図のような構造を考える。
密度・磁場強度の非一様性がx方向にあり、電流はy方向に流れている。この電流が作る磁場はz方向を向き、x>0とx<0の領域で方向が逆である。



一般化されたオームの法則とファラデーの法則から、磁場の時価発展の式として以下を得る。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$= (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B}$$

$$\because \nabla^2 \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

テアリング不安定性　II

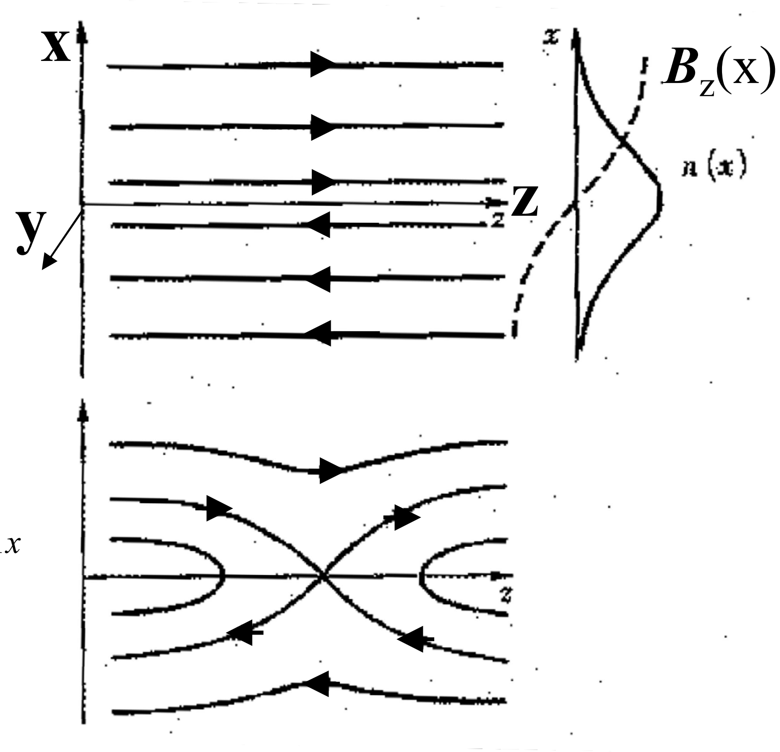
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{B} - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{u}) - \frac{\eta}{\mu_0}\nabla^2\mathbf{B}$$

$$j_y = \begin{cases} -j_{y0} & -\varepsilon < x < \varepsilon \\ 0 & |x| > \varepsilon \end{cases}$$ とすると、

$$B_{z0}(x) = \begin{cases} B_{z0}' x & -\varepsilon < x < \varepsilon \\ -B_{z0}'\varepsilon & x < -\varepsilon \\ B_{z0}'\varepsilon & x > \varepsilon \end{cases}$$

B_y=0として、摂動磁場のx成分B_{1x}に着目すると、

$$\frac{\partial B_{1x}}{\partial t} \sim B_{z0}\frac{\partial u_{1x}}{\partial z} - \frac{\eta}{\mu_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)B_{1x}$$



摂動成分が $B_{1x}, u_{1x} = \hat{B}_{1x}(x), \hat{u}_{1x}(x)\exp(\gamma t - ikzx)$ のような時間。空間依存性を持つと仮定し、上式に代入すると、

$$\gamma B_{1x} \sim -ikB_z u_{1x} - \frac{\eta}{\mu_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2\right)B_{1x}$$

したがって、抵抗がゼロのときは、$\gamma B_{1x} \sim -ikB_{z0}u_{1x}$ となり、B_{z0}がゼロの場所では、B_{1x}=0.

=> 磁力線のトポロジーは変化せず。

上図のまま

テアリング不安定性　III

$$\gamma B_{1x} \sim -ikB_z u_{1x} - \frac{\eta}{\mu_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2\right)B_{1x}$$

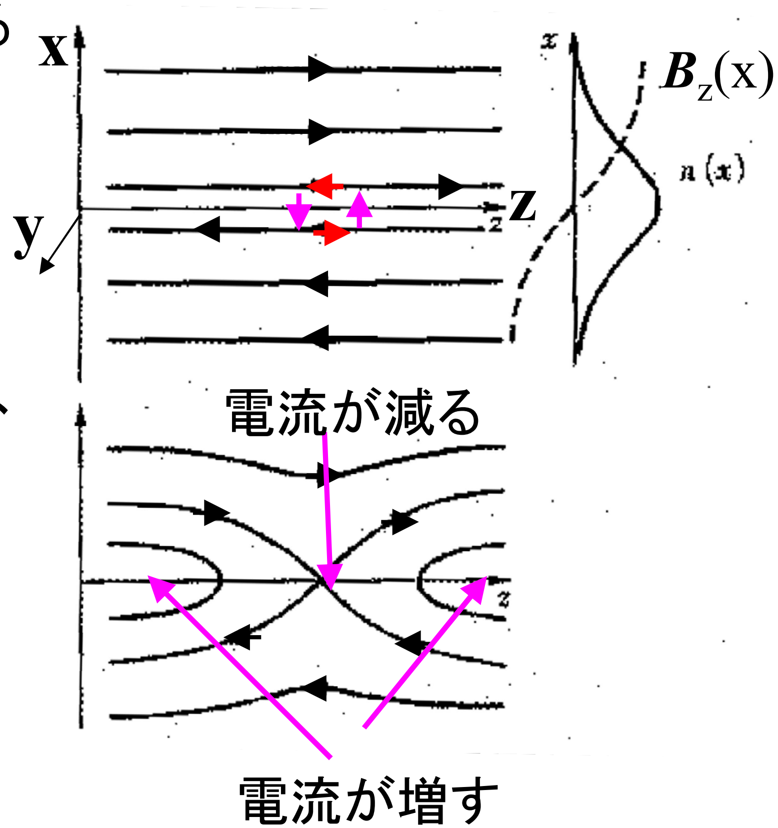
$$j_y = \begin{cases} -j_{y0} & -\varepsilon < x < \varepsilon \\ 0 & |x| > \varepsilon \end{cases}$$ とすると、

$$B_{z0}(x) = \begin{cases} B_{z0}{}' x & -\varepsilon < x < \varepsilon \\ -B_{z0}{}' \varepsilon & x < -\varepsilon \\ B_{z0}{}' \varepsilon & x > \varepsilon \end{cases}$$

一方、抵抗がゼロでないときは、B_{z0}がゼロの場所でも、B_{1x}=/0となりうる。

この時、x~0の領域でB_z=0となる領域が広がると、トータルの磁気エネルギーは減少し、ポテンシャルエネルギーの低い状態に移行できるので、不安定となりうる。

B_z=0となる領域が広がるには、右上図の赤矢印のような摂動磁場が生じる必要があるが、摂動磁場は、$\nabla \cdot \boldsymbol{B}_1$=0 を満たす必要があるので、ピンクの矢印のようなB_{1x}=/0 の摂動磁場が生ずる。すると、右下図のようにx=0の面を横切る磁場が存在可能になる。



磁気島の形成

テアリング不安定性 IV　Advanced

運動方程式から

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}_1 = \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_1 - \nabla p_1 = -\nabla\left(p_1 + \frac{\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_0}{\mu_0}\right) + \frac{1}{\mu_0}\left[(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\mathbf{B}_1 + (\mathbf{B}_1 \cdot \nabla)\mathbf{B}\right]$$

ここで、$\boldsymbol{u}_{\mathrm{y}}=0$, $\boldsymbol{B}_{\mathrm{y}}=0$, $|\boldsymbol{B}_{\mathrm{x}}| << |\boldsymbol{B}_{\mathrm{z0}}|$、$B_1, u_1 = \hat{B}_1(x), \hat{u}_1(x)\exp(\gamma t - ikzx)$ を使うと、

$$\gamma\rho_0 u_{1x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p_1 + \frac{\mathbf{B}_{z0}\cdot\mathbf{B}_{z1}}{\mu_0}\right) + \frac{1}{\mu_0} ik\mathbf{B}_{z0}\mathbf{B}_{1x} \quad (*)$$

$$\gamma\rho_0 u_{1z} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p_1 + \frac{\mathbf{B}_{z0}\cdot\mathbf{B}_{z1}}{\mu_0}\right) + \frac{1}{\mu_0}\left[-ik\mathbf{B}_{z0}\mathbf{B}_{1z} + \mathbf{B}_{1x}\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{B}_{z0}\right] \quad (**)$$

$$\left[-\mathbf{B}_{z0}\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{B}_{1x} + \mathbf{B}_{1x}\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{B}_{z0}\right]$$

$$\because \nabla\cdot\mathbf{B}_1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{B}_{1x} - ik\mathbf{B}_{1z} = 0$$

(*) xik, ∂／∂x(**) より、

$$\gamma\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 u_{1z}) - ik\rho_0 u_{1x}\right] = -\frac{1}{\mu_0}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\mathbf{B}_{z0}{}^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathbf{B}_{1x}}{\mathbf{B}_{z0}}\right)\right] - k^2\mathbf{B}_{z0}\mathbf{B}_{1x}\right\}$$

$$-\frac{i\gamma}{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial u_{1x}}{\partial x}\right) - k^2\rho_0 u_{1x}\right]$$

$$\because \nabla\cdot\mathbf{u}_1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}u_{1x} - iku_{1z} = 0$$

テアリング不安定性 V

Advanced

$\left|\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right| >> k^2$ と近似すると、磁場の時間発展式、運動方程式は以下のように書ける。

$$\gamma B_{1x} \sim -ikB_z u_{1x} - \frac{\eta}{\mu_0}\frac{\partial^2 B_{1x}}{\partial x^2} \qquad -i\frac{\gamma}{k}\rho_0\frac{\partial^2 u_{1x}}{\partial x^2} = -\frac{\mathbf{B}_{z0}'}{\mu_0}x\frac{\partial^2 \mathbf{B}_{1x}}{\partial x^2}$$

上式から、$\partial^2 B_{1x}/\partial \mathrm{x}^2$を消去すると

$$\eta\gamma\rho_0\frac{\partial^2 u_{1x}}{\partial x^2} = k\mathbf{B}_{z0}'x\left(i\gamma\overline{\mathbf{B}}_{1x} + k\mathbf{B}_{z0}'xu_{1x}\right) \qquad (*)$$

ここで、$X \equiv \dfrac{x}{\delta}, \delta \equiv \dfrac{(\eta\gamma\rho_0)^{0.25}}{(k\mathbf{B}_{z0}')^{0.5}} \qquad U \equiv \dfrac{\delta(k\mathbf{B}_{z0}')}{i\gamma\overline{\mathbf{B}}_{1x}}u_{1x}$ と定義すると

(*) 式は、以下のように変形できる。

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = X(1 + XU)$$

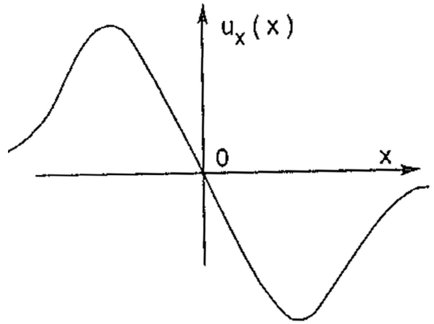
テアリング不安定性 VI

Advanced

以下の条件を満たすように $\dfrac{\partial^2 U}{\partial X^2} = X(1+XU)$ を解いてみると、

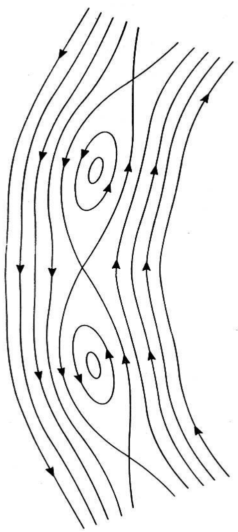
$$U \to -\mathrm{X}^{-1} \text{ as } \mathrm{X} \to \pm\infty$$

$$U(X) = -\frac{X}{2}\int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{X}{2}\cos\theta\right)(\sin\theta)^{1/2}\, d\theta$$



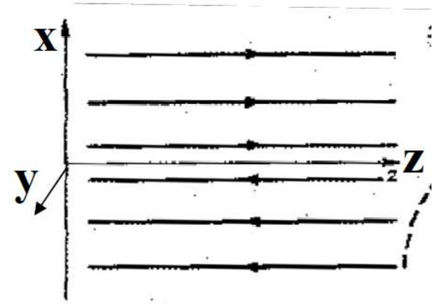
上記の解を使って、$[\partial B_{1\mathrm{x}}/\partial \mathrm{x}]_{\mathrm{x}=0}$を評価してみる。

$$\left[\frac{\partial B_{1x}}{\partial x}\right]_{x=0} = \frac{\mu_0}{i\eta}\int \left(i\gamma B_{1x} + kB_z u_{1x}\right)dx$$



$$\therefore \frac{1}{\overline{B}_{1x}}\left[\frac{\partial B_{1x}}{\partial x}\right]_{x=0} = \frac{\gamma^{5/4}\rho_0^{\ 1/4}\mu_0}{\eta^{3/4}(kB_{z0}')^{1/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+XU)dX \sim \frac{\gamma^{5/4}\rho_0^{\ 1/4}\mu_0}{\eta^{3/4}(kB_{z0}')^{1/2}} \times 2.12$$

ここで、$\Delta' = [\partial B_{1\mathrm{x}}/\partial \mathrm{x}]_{\mathrm{x}=0}/B_{1\mathrm{x}}$と定義すると



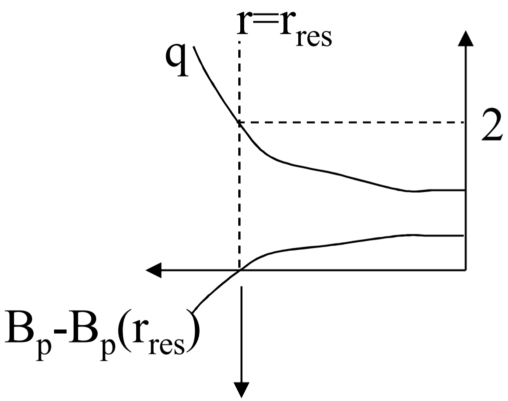
$$\gamma \sim 0.55 \times \frac{\eta^{3/5}(kB_{z0}')^{2/5}}{\rho_0^{\ 1/5}\mu_0^{\ 4/5}}\Delta'^{4/5}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}_1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}B_{1x} - ikB_{1z} = 0 \Rightarrow \left[\frac{\partial B_{1x}}{\partial x}\right]_{x=0} = ik[B_{1z}]_{x=0}$$

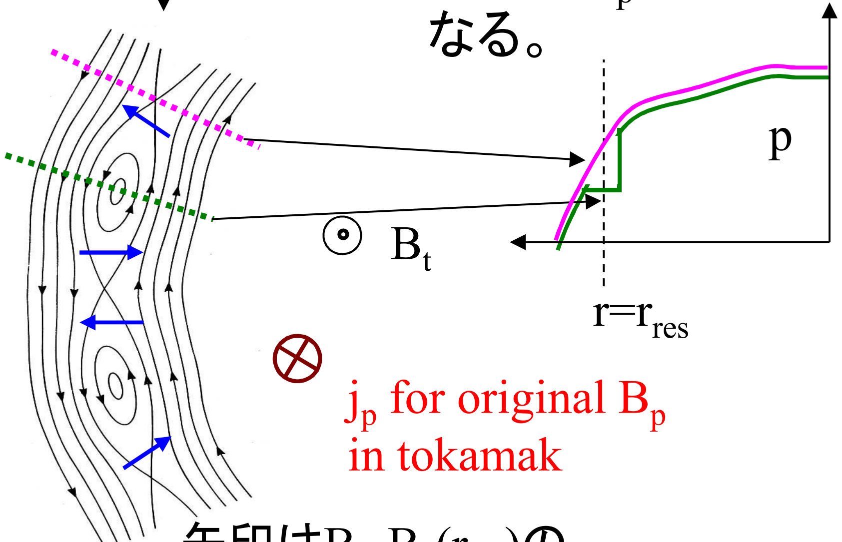
新古典テアリング不安定性　Advanced

先進トカマク運転では、外部駆動電流の低減のため、ブートストラップ電流(自発電流)がかなり流れることが期待されている。

しかしながら、ブートストラップ電流はテアリングモードのような磁気島を有する不安定性を助長する可能性がある。



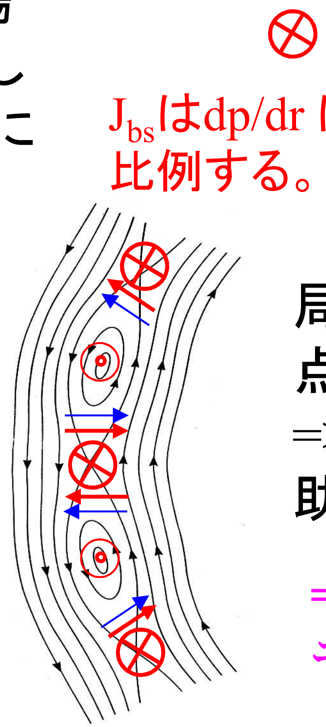
左図のようなq分布の場合、共鳴面でのB_pを差し引いたB_pは左図のようになる。



矢印はB_p-$B_p(r_{res})$の向き

J_{bs}; トカマクでは、元のBpを強める方向に流れる。

J_{bs}はdp/dr に比例する。



局所的なBS電流は、X点で元のj_pを助長
=>磁気島を作る電流を助長

=> 新古典テアリングモードの成長

熱・電磁流体物理特論@ES025, Thus.10:30~

0. イントロ

（MHD研究の意義;熱核融合発電炉の開発研究での位置づけ等）

1. MHD平衡特性、安定特性の粒子的描像と流体的描像の概説

2. 速度分布関数とは

3. 流体方程式と電磁流体方程式(MHD方程式)とは

4. MHD方程式に基づくプラズマのMHD平衡特性、安定特性の評価例

5. MHD研究のトピックス等

MHD揺動の構造の指標 I

簡約化MHD方程式

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\nabla_\perp{}^2 U = -(\mathbf{B}_0\cdot\nabla)\nabla^2\psi_1 - \nabla\psi_1\times\mathbf{e}_\phi\cdot\nabla j_{\phi 0} - \mathbf{e}_\phi\times\boldsymbol{\kappa}_r\cdot\nabla p_1 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = \mathbf{B}_0\cdot\nabla U + \eta\nabla^2\psi_1 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}p_1 + \nabla U\times\mathbf{e}_\phi\cdot\nabla p_0 = 0 \qquad (3)$$

$$\nabla_\perp \equiv \nabla - \frac{\mathbf{B}_0}{|\mathbf{B}_0|}\cdot\nabla$$

$$\mathbf{u}_1 = \nabla U\times\mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{B}_1 = \nabla\psi_1\times\mathbf{e}_\phi$$

(3)から、

数値計算との比較

$$\frac{\partial}{\partial t}p_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta\times\mathbf{e}_\phi\cdot\mathbf{e}_r\frac{dp_0}{dr} = 0 \qquad -i\omega p_1 + \frac{im}{r}U\frac{dp_0}{dr} = 0 \qquad p_1 = \frac{1}{r}\frac{dp_0}{dr}\frac{m}{\omega}U$$

不安定だと
逆位相
安定なら
同位相

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1\cdot\nabla p_0 = 0 \qquad -i\omega p_1 + \mathbf{u}_{1r}\frac{dp_0}{dr} = 0 \qquad \mathbf{u}_{1r} = \frac{i\omega p_1}{dp_0/dr} \qquad \xi_r = -\frac{p_1}{dp_0/dr}$$

$$\xi_r \sim -\frac{n_1}{dn_0/dr} \sim -\frac{T_1}{dT_0/dr}$$

実験での評価

(2)から、抵抗の効果が大きい場合

$$\frac{\partial\mathbf{B}_1}{\partial t} = (\mathbf{B}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{u}_1\cdot\nabla)\mathbf{B}_0 + \eta\mathbf{j}_1 \qquad (\mathbf{B}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}_1 \sim \eta\mathbf{j}_1 \qquad ik_{//}\mathbf{u}_{1r} \sim \eta\mathbf{j}_1$$

$$k_{//} \sim k_{//0} + k'_{//0}(r - r_{res}) \qquad ik'_{//0}(r - r_{res})\mathbf{u}_{1r} \sim \eta\mathbf{j}_1 \qquad \mathbf{u}_{1r} \sim \frac{\eta\mathbf{j}_1}{ik'_{//0}(r - r_{res})}$$

共鳴有理面で

共鳴有理面で、摂動電流分布が偶関数なら、速度分布は奇関数

MHD揺動の構造の指標 II

簡約化MHD方程式

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\nabla_\perp{}^2 U = -(\mathbf{B}_0\cdot\nabla)\nabla^2\psi_1 - \nabla\psi_1\times\mathbf{e}_\phi\cdot\nabla j_{\phi 0} - \mathbf{e}_\phi\times\boldsymbol{\kappa}_r\cdot\nabla p_1 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = \mathbf{B}_0\cdot\nabla U + \eta\nabla^2\psi_1 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}p_1 + \nabla U\times\mathbf{e}_\phi\cdot\nabla p_0 = 0 \qquad (3)$$

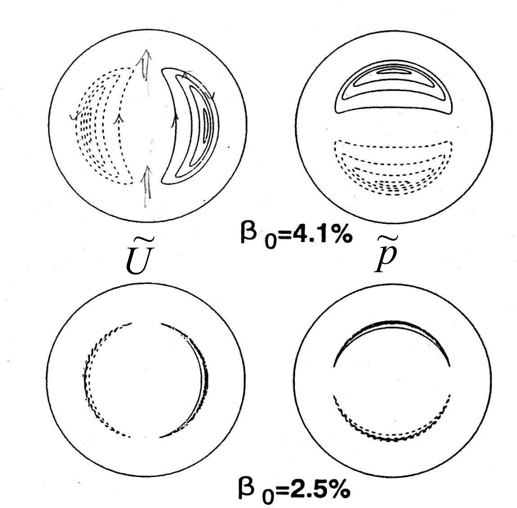
$$\nabla_\perp \equiv \nabla - \frac{\mathbf{B}_0}{|\mathbf{B}_0|}\cdot\nabla$$

$$\mathbf{u}_1 = \nabla U\times\mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{B}_1 = \nabla\psi_1\times\mathbf{e}_\phi$$

(2)から、抵抗の効果がゼロの場合

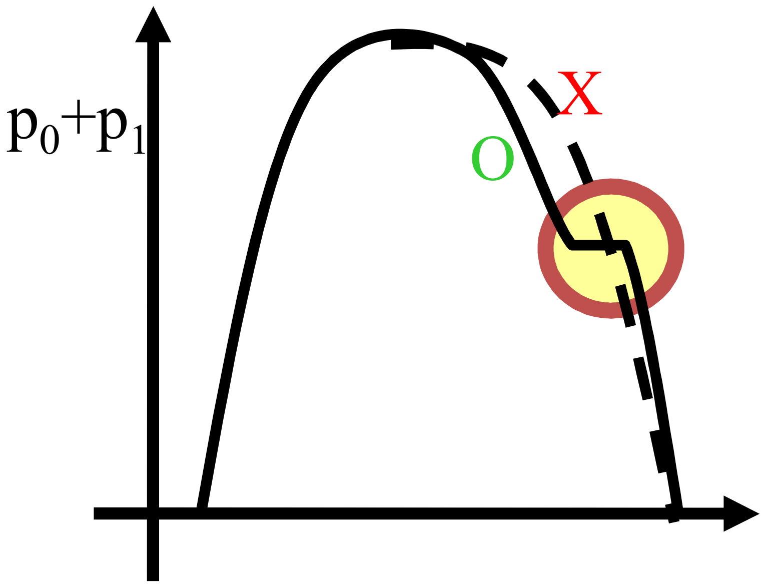
$-i\omega\psi_1 = ik_{//}U$　　共鳴有理面で　$-\omega\psi_1 = k'_{//0}(r-r_{res})U$　　$\psi_1 = -\dfrac{k'_{//0}(r-r_{res})}{\omega}U$

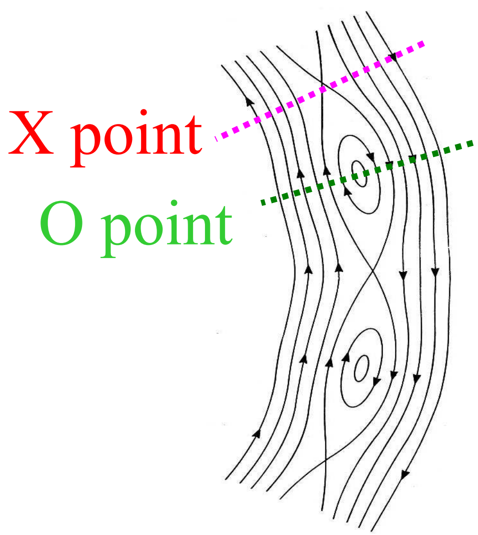


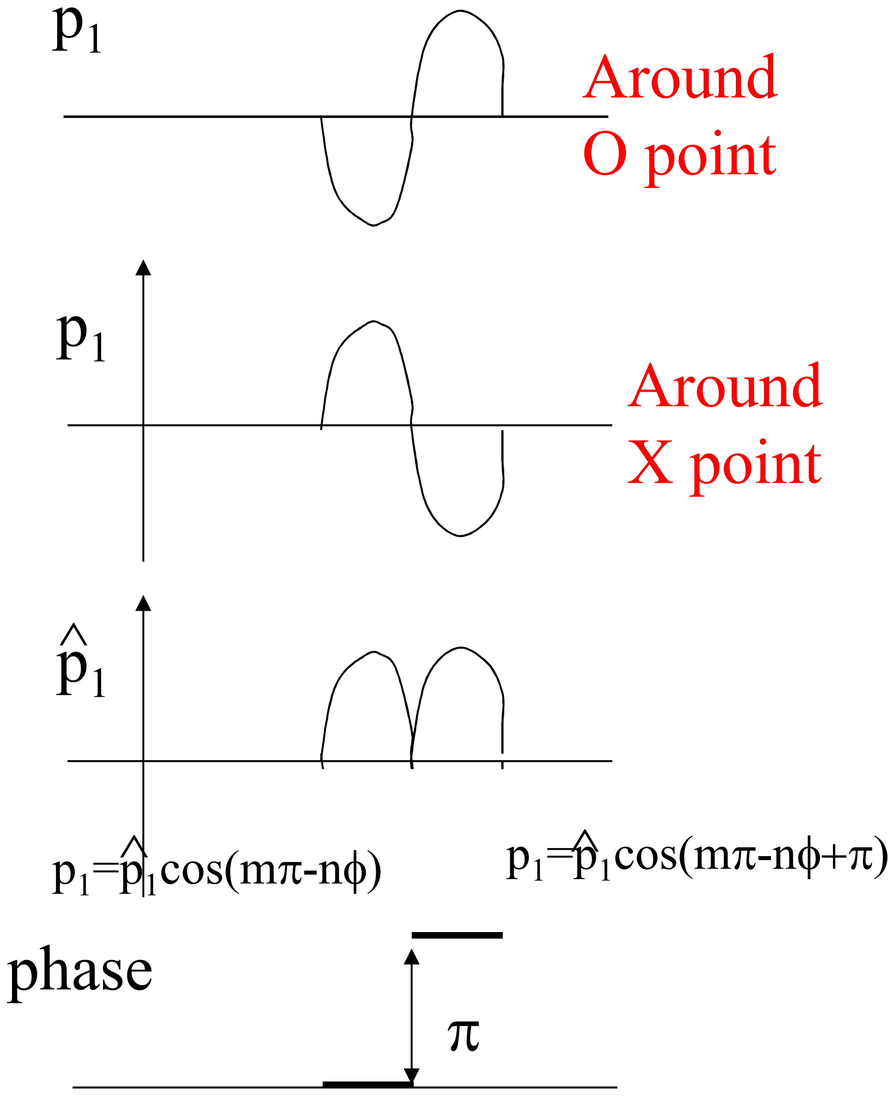
共鳴有理面では、摂動ポロイダル磁束が常にゼロ
=> 共鳴有理面上で摂動電流がゼロ

位相は、不安定なら逆。安定なら、同位相。

MHD揺動の構造の指標 III



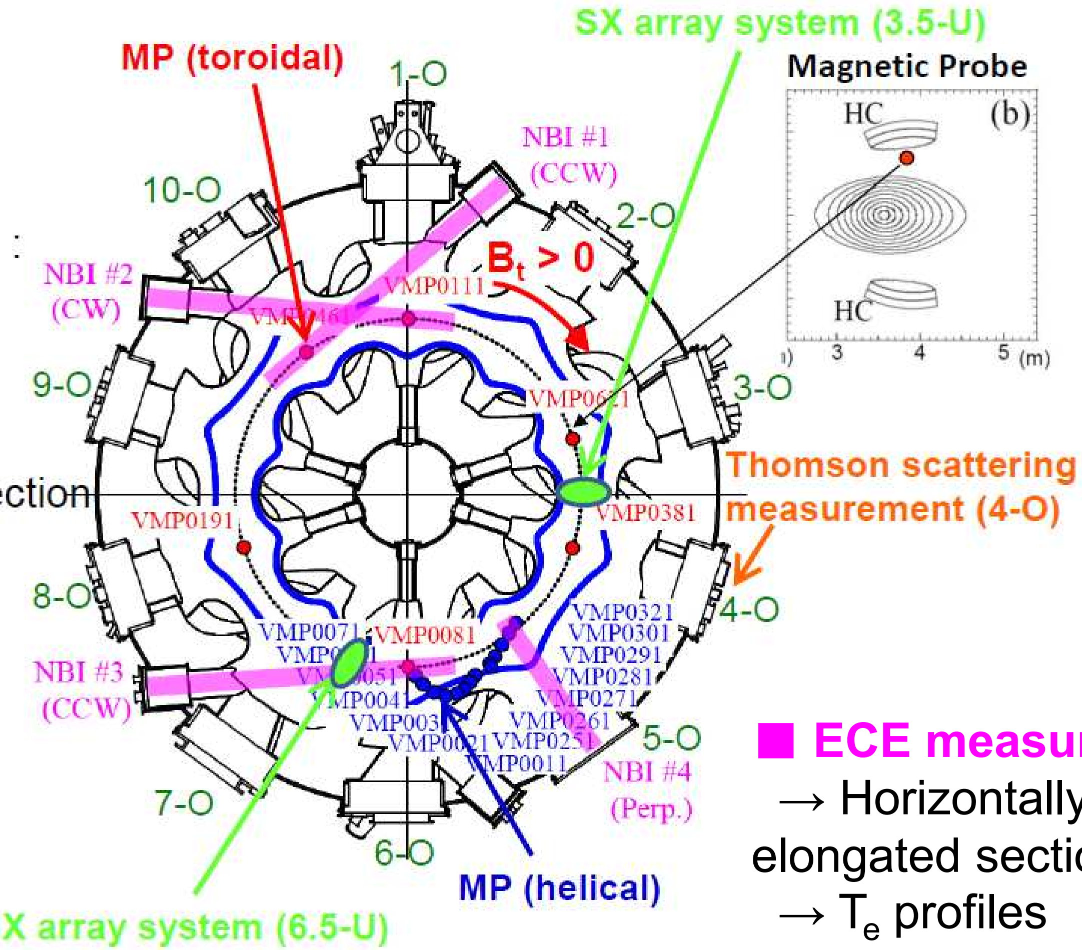


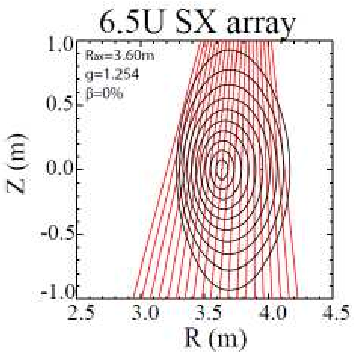


MHD揺動計測

LHDにおける周辺MHDモードの計測装置

- **Magnetic Probe (MP)**
  Toroidal : 6 sets
  Poloidal (Helical) : 15 sets
  → δb_θ, m,n-number
- **Soft X-ray array (SX)**
  Vertically elongated section :
  3.5-U and 6.5-U ports
  → I_{sx}, δI_{sx}, m-number
- **Thomson scattering measurement**
  → Horizontally elongated section
  → T_e and n_e profiles



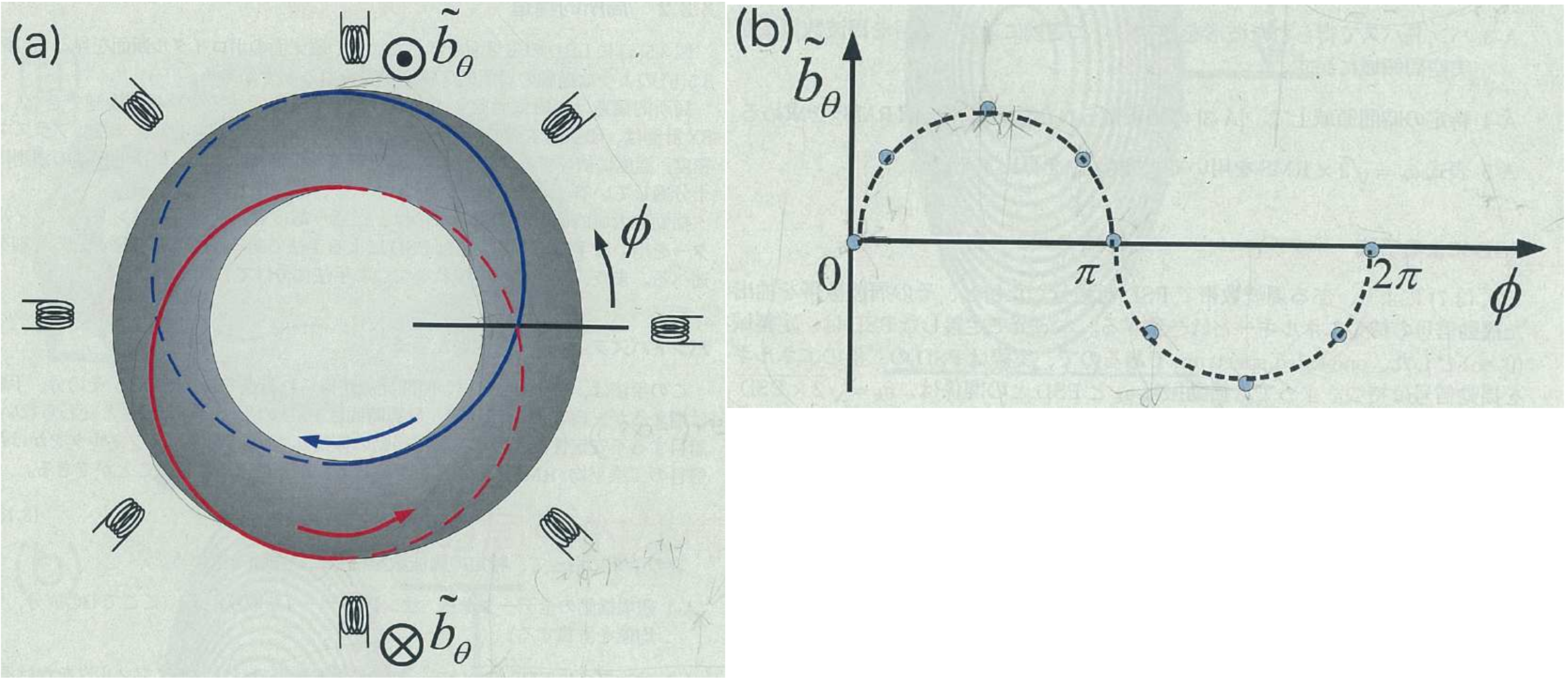


- **ECE measurement**
  → Horizontally elongated section
  → T_e profiles

11

磁気計測器

トロイダル方向、ポロイダル方向に複数個取り付け、磁場の強度の位相変化を調べることにより、トロイダル方向、ポロイダル方向の低波数の空間構造を推定する。



磁気計測器 II

ここで、磁気計測器は真空領域で計測していることに注意。

外部キンクの章で示したように、

真空中では、$\nabla \mathrm{x}\mathbf{B}=0$より、$\Psi$はLaplace方程式を満たすので、 $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{\mathrm{m}^2}{r^2}\Psi=0.$

Laplace方程式の解は、$\Psi=\alpha r^{\mathrm{m}}+\beta r^{-\mathrm{m}}$と表せることに注意し、真空容器の境界は、導体であることを使うと、$B_{\mathrm{r}}(b)=0$ at $r=b$ => $\Psi=0$ at $r=b$.

一方、プラズマ表面$(r=a)$で、$B_{\mathrm{Vr1}}(a)=-\mathrm{i}m\Psi_a/a=Q_{\mathrm{r}}(a)=-\mathrm{i}(mB_{\varphi}/R)(n/m-1/q_{\mathrm{a}})\xi_{\mathrm{ra}}$
=> $\Psi_{\mathrm{a}}=B_{\theta\mathrm{a}}(nq_{\mathrm{a}}/m-1)\xi_{\mathrm{ra}}$.

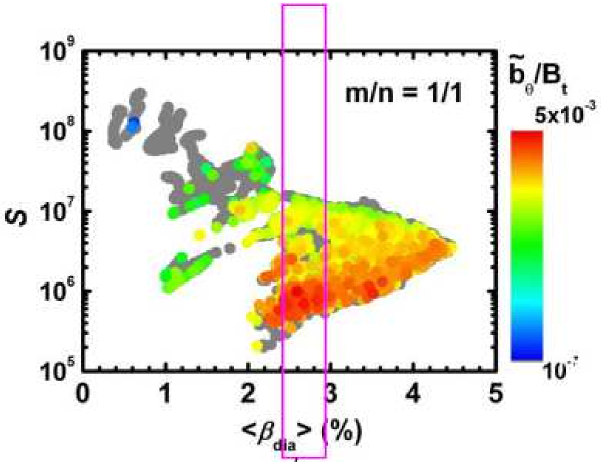
以上より真空中のΨの解は $\boxed{\Psi=B_{\theta a}\left(\frac{nq_a}{m}-1\right)\frac{(r/b)^m-(b/r)^m}{(a/b)^m-(b/a)^m}\xi_{ra}.}$ $\mathbf{B}_1=\nabla\psi_1\times\mathbf{e}_\phi$

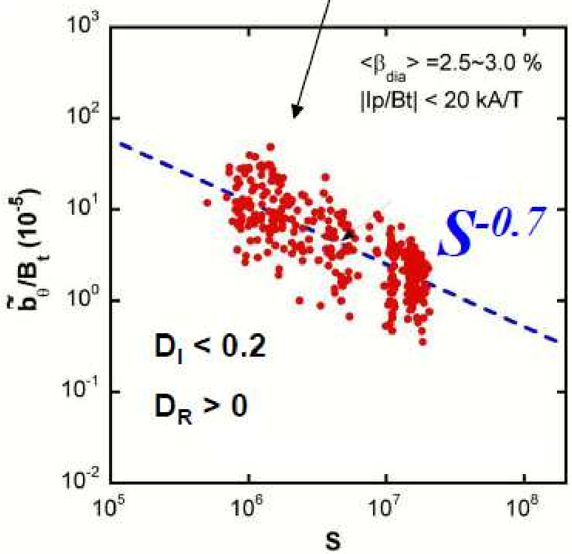
ここで、$B_{\theta\mathrm{a}}$, ξ_{ra}はプラズマ境界での磁場及び径方向変位であるので、この値が=/0でないと、プラズマ中に摇動磁場があっても、磁気計測器では不安定性を計測できないことに注意。

しかしながら、実際上は特に低波数の摇動計測感度は他の摇動計測に比べて、非常に大きい。

LHDにおける磁場搖動計測結果の例

周辺付近に共鳴面を持つ低次回転モードの特性 (I)
--- 磁場揺動のS (磁気レイノルズ数)の依存性 ---





磁気レイノルズ数Sの低下
=> 磁場揺動(外部計測)強度が増大

$b^{\sim} \propto S^{-0.7}$

LHDの高ベータ運転領域で観測される可能性が高い不安定性の種類は？

抵抗性交換型不安定性

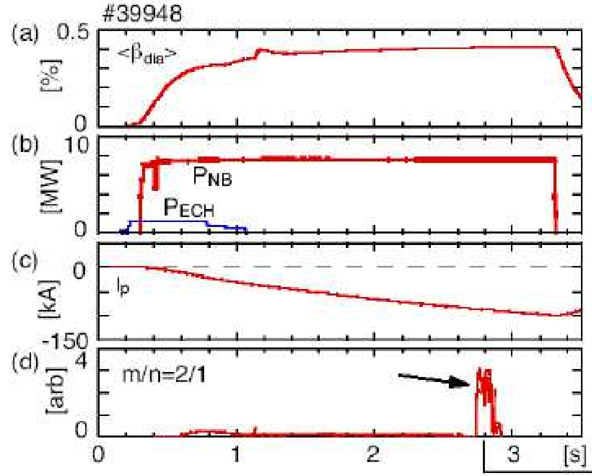
モード幅、成長率に対するS, β依存性の理論予測はよく知られているが、磁場揺動(外部計測)の理論予測は?; 無?

抵抗性交換型モードの理論予測; $\Delta_{LRGM} \propto \beta^{1/6} S^{-1/3}$

磁場揺動強度の決定機構は?
(1) 非線形飽和状態における有理面共鳴電流(磁気島)の出現?
(2) 自由境界効果による揺動磁場構造の漏れ出し($B_0 \cdot \nabla\xi$)?

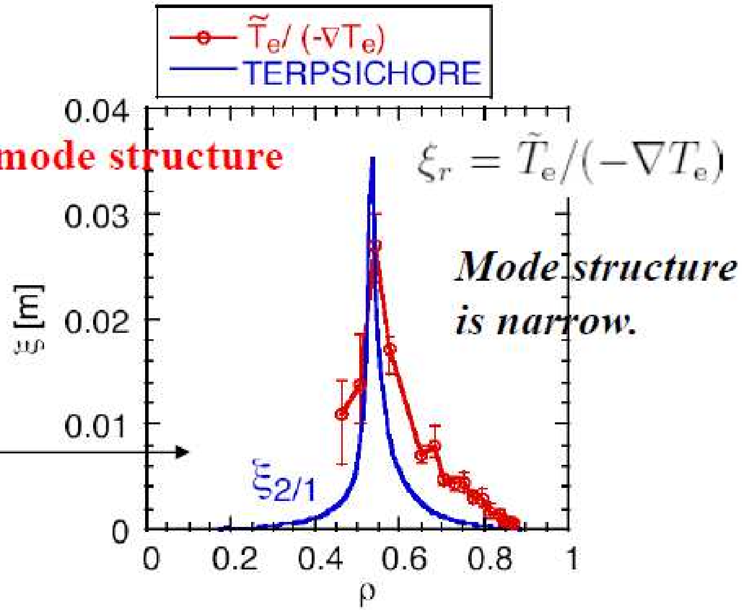
$b^{\sim} \propto S^{-0.7} + \Delta_{LRGM} \propto S^{-1/3} \Rightarrow \Delta_{LRGM} \propto b^{\sim\, 0.48}$

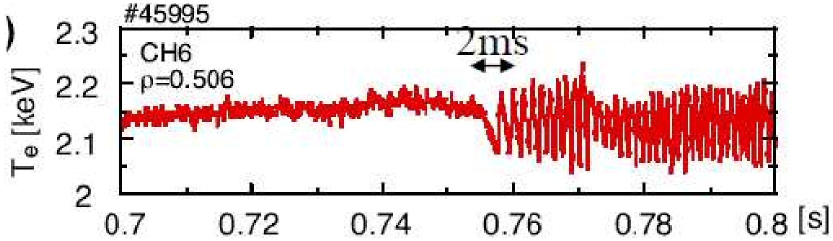
LHDにおけるMHD空間構造計測結果の例



Poloidal and troidal mode structure m/n=2/1

Radial mode structure





Evolution of the ECE perturbation

Toroidal Alfven freq. ~5.3x10^{6}Hz @2.75T, n_e=10^{19}m^{-3}, R_0=3,6m

According to theoretical prediction, the growth rate is around ~1.6x10^{4}Hz (63μs).

There is discrepancy between the prediction and observation in the growth rate.

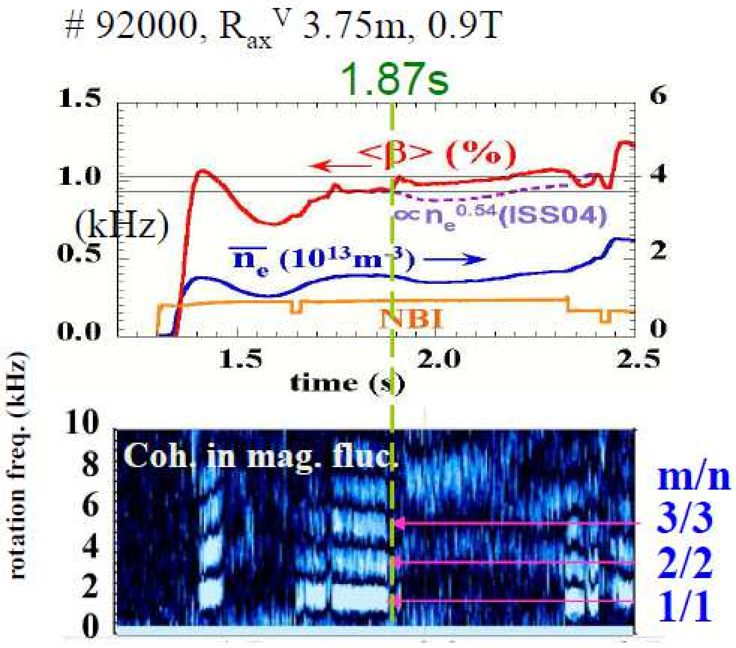
Profile of the radial displacement by ECE measurement and theoretical prediction (Interchange mode)

The prediction of the ideal interchange mode is quite consistent with the observation on the mode structure.

A.Isayama et al; Plasma Phys. Contr. Fus. to be published (2005).

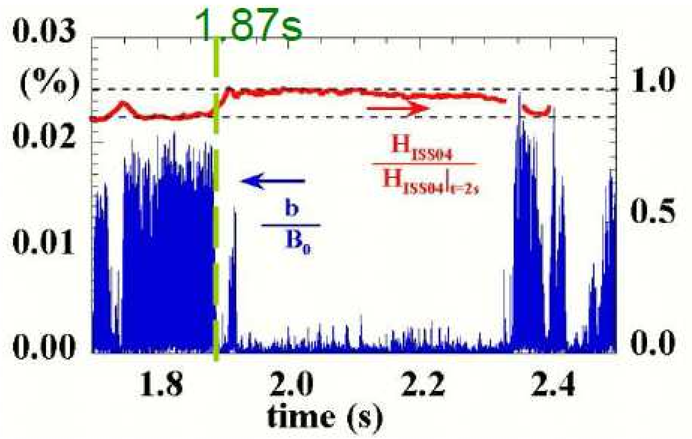
LHDにおけるMHD揺動の閉じ込めに与える影響の例 I

Effect of m/n=1/1 MHD mode on confinement



After disappearance of Mag. fluc., the beta increases

Confinement performance normalized by an empirical τ_E scaling (ISS04) in presence and disappearance

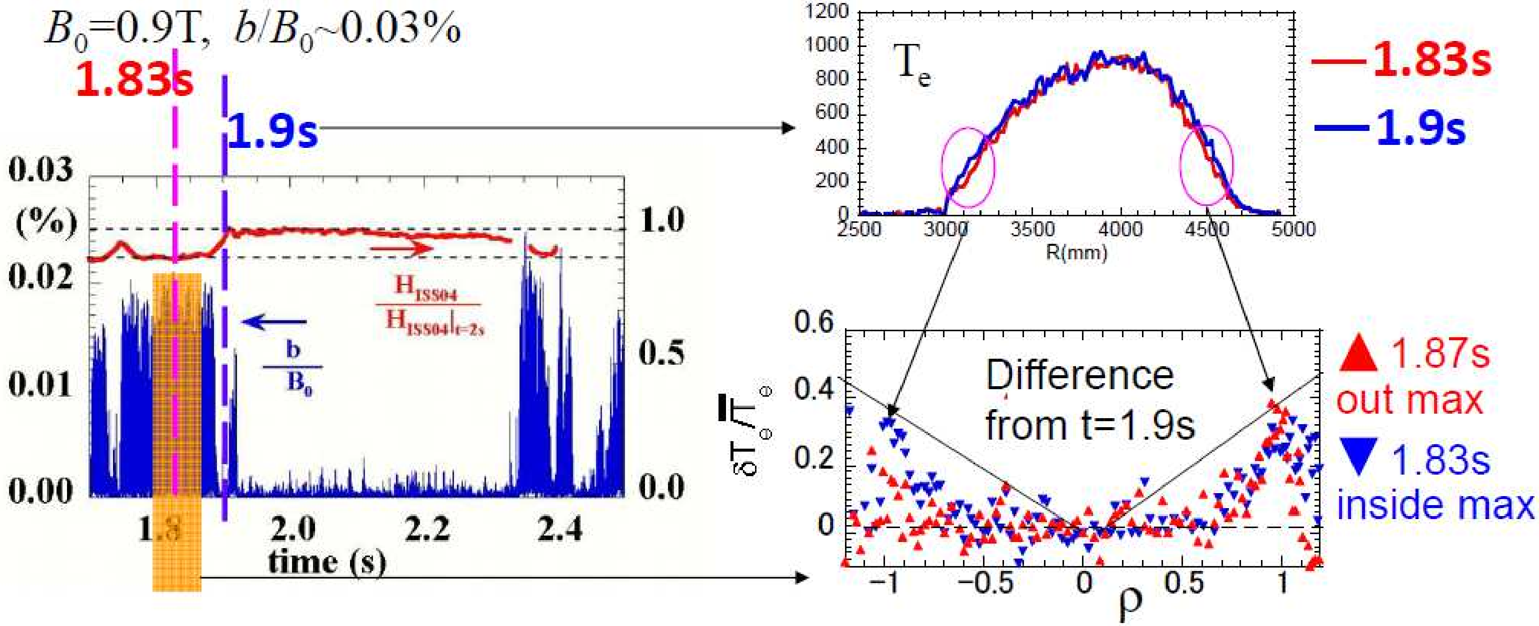


~10% degradation of the normalized global conf. time by a empirical scaling (ISS04) in the presence of the m/n=1/1 mode

10/2

LHDにおけるMHD揺動の閉じ込めに与える影響の例 II

Degradation Area due to the m/n=1/1 mode estimated from Te profile

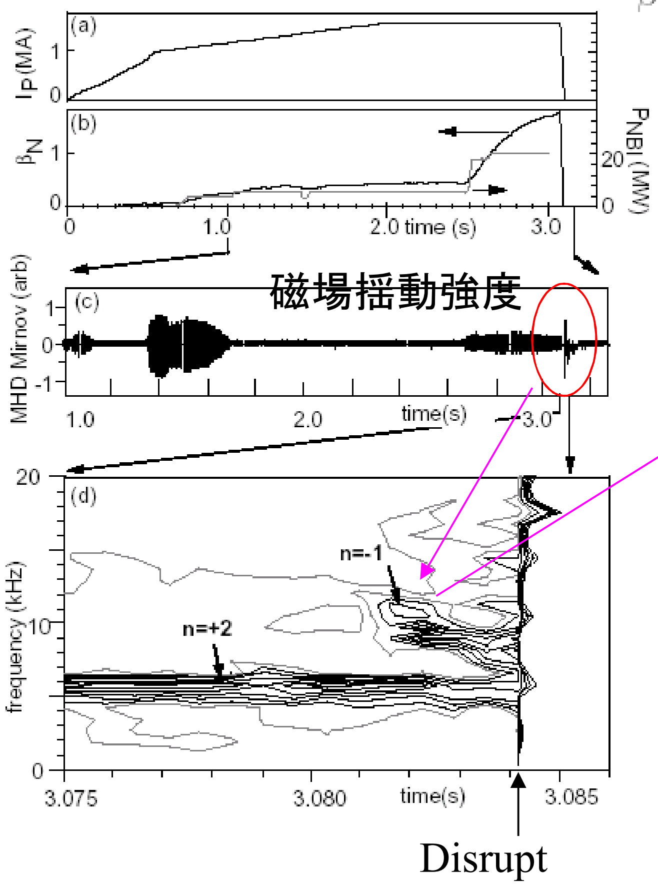


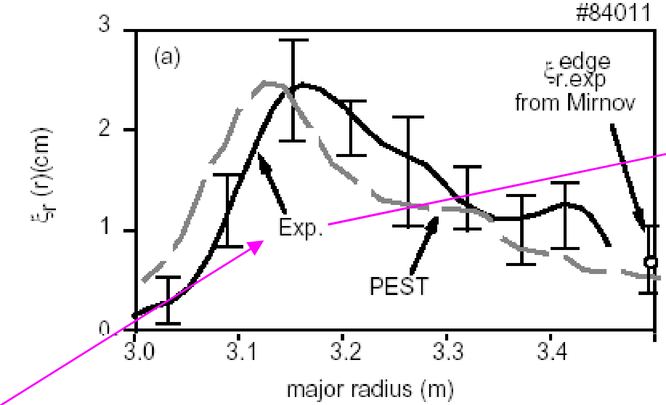
Decrease in Te is restricted to peripheral region around resonant rational surface by the m/n=1/1 mode
=>
Impact on core region is quite small.

11/20

キンク不安定性の観測例 ---TFTR(Tokamak Test Fusion Reactor;米国)---

$\beta = 0.5\%,\ \beta_N = 1.4$ and $\beta_p = 1.3.$





揺動強度の小半径方向分布

$$\xi_r = \tilde{T}_e/(-\nabla T_e)$$

	Small $r_{q_{\min}}$
Shot	84011
Time (s)	3.08
$\tau_{\rm growth}$ (μs)	$\simeq$150
$r_{q_{\min}}/a$	0.53
$\xi_{r,\rm exp}^{\max}$ (mm)	25
$\xi_{r,\rm exp}^{\rm edge}$ (mm)	7
δB (G)	3
m/n	2/(−1)
$\omega_{\rm obs}/2\pi$ (kHz	7

観測された揺動強度分布は理論予測に近い

ω_A=1.7e6~5e6Hz

n_e=1e20~1e19m^{-3}, 5T

成長率　1/150μs~1e4Hz

$$\xi_\theta = -\frac{\mathrm{i}}{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\xi_r).$$

成長率の観測値はキンク不安定性の理論予測より数10倍遅い

150μsでプラズマが消滅

M.Okabayashi et al; Nucl. Fus. 38, 1149 (1998).